MANUALI HOEPLI

Prof. A. ANTILLI

DISEGNO
EOMETRICO

QUARTA EDIZIONE

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO

DISEGNO GEOMETRICO

MANUALI HOEPLI

DISEGNO GEOMETRICO

DI

A. ANTILLI

Professore alla R. Scuola Militare di Modena

QUARTA EDIZIONE AUMENTATA

CON 28 TAVOLE E 6 FIGURE NEL TESTO

ULRICO HOEPLI

EDITORE LIBRAIO DELLA REAL CASA

MILANO

1914

Tipografia Umberto Allegretti — Milano, via Orti, 2.

INDICE

PREFAZIONE	Pag. IX	

PRELIMINARI.

	Pag.	Tav.
Convenzioni usate nel Disegno Geometrico	1	
Squadratura del foglio	2	*A*
Scritture adoperate nei disegni	3	*B*
Avvertenze generali per la buona riuscita dei disegni	4	

PARTE I.

Problemi grafici di Geometria.

Perpendicolari. — Angoli	6	I
Divisione degli angoli. — Parallele . .	9	II
Divisione delle rette in parti eguali. — Segmenti proporzionali	12	III
Triangoli	15	IV
Quadrilateri	18	V
Tangenti	21	VI
Raccordamenti	25	VII
Divisione della circonferenza in parti eguali. — Poligoni regolari inscritti	28	VIII

	Pag.	Tav.
Costruzione di poligoni di lato dato . .	30	IX
Poligoni a stella	34	X
Figure equivalenti	36	XI
Ovale — Ovolo — Spirale	39	XII
Elisse	43	XIII
Iperbole — Parabola	47	XIV
Scale semplici e ticoniche	52	XV
Copia dei disegni	60	XVI
Riduzione dei disegni. — Figure simili .	63	XVII
Riduzione lineare	64	
Riduzione superficiale	68	

PARTE II.

Ornamenti Geometrici.

Linee d'ombra o tratti di forza	70	
Meandri	72	XVIII
Fregi diversi	74	XIX
Pavimenti	76	XX
Nodi e intrecci	77	XXI
Intrecci vari	79	XXII
Oggetti vari	80	XXIII
Vasi	82	XXIV
Ornamenti in ferro	ivi	XXV
Finestra gotica	83	XXVI

PREFAZIONE

Ne' numerosissimi manuali di Disegno Geometrico, fino ad ora pubblicati, le soluzioni grafiche dei varî problemi sono sempre limitate alle materiali operazioni necessarie per compiere le figure, ed invano cercherebbesi, in simili trattati, una ragione qualsiasi del perchè la data costruzione risolva il problema proposto.

Questo mio lavoretto tende appunto a colmare tale mancanza, avendo dato un più largo sviluppo alla parte teorica, nella quale, dopo indicata l'operazione grafica, ho data ragione della soluzione, richiamando alla mente gli assiomi e le dimostrazioni della Geometria, perchè è appunto la Geometria che ci insegna a risolvere graficamente tali problemi.

Ho poi limitato il numero delle figure allo *strettamente necessario, non omettendo quelle costruzioni che più sovente trovano una pratica soluzione nelle arti, ed ho curato che le soluzioni più complesse trovassero nei problemi precedenti le regole per la loro più spedita esecuzione.*

In alcune parti ho abbreviato il lavoro: per esempio nella tavola VIII ho riunito in un solo problema le divisioni della circonferenza in un dato numero di parti, e l'iscrizione di poligoni dello stesso numero di lati, perchè, per le seconde soluzioni, dovrebbero tutte ripetersi le operazioni fatte per le prime, il che equivale a disegnare due volte le stesse figure. Ho invece dato ampio sviluppo alle scale, la cui conoscenza in modo chiaro e sicuro è davvero indispensabile.

Sono pressocchè infiniti gli ornamenti che si possono ottenere dall'impiego delle costruzioni geometriche, e le tavole che costituiscono questa seconda parte, non potendo abbracciare tutte le specie di tali ornamenti, sono a considerarsi come esercizi di perfezionamento e di applicazione delle cose già studiate.

Gli ornamenti compresi nelle prime tre tavole sono di forme esclusivamente rettilinee, e nelle altre sei tavole, in cui sono impiegate le linee curve, ho avuta speciale cura di scegliere quegli ornamenti nei quali fosse ampio esercizio sui raccordamenti.

Modena, Dicembre 1896.

A. Antilli.

PRELIMINARI

Convenzioni usate nel Disegno Geometrico.

Le linee che rappresentano gli elementi dati, e la soluzione del problema, si tracciano continue. È necessario che queste linee riescano leggiere ed omogenee, cioè di eguale grossezza.

Le linee che rappresentano le varie operazioni che hanno condotto alla soluzione, si tracciano a piccoli segmenti staccati leggierissimi, molto brevi, di lunghezza eguale e ad eguali intervalli. L'insieme di queste linee deve risultare più leggiero delle linee continue.

Le linee alle quali si dà una speciale importanza, si rappresentano con tratti e punti alternati, ed alquanto più grosse delle linee a tratti o di costruzione.

Le linee che rappresentano spigoli di solidi non visibili, si disegnano con una serie di punti piccoli e rotondi: non si impiegano quindi nella rappresentazione di figure nella geometria piana.

Tavola A.

SQUADRATURA DEL FOGLIO.

Varî sono i modi per riquadrare il foglio: primo di tutti per semplicità è il metodo delle diagonali, ma questo dà un rettangolo *simile* al foglio, che ben difficilmente ha le proporzioni che si vogliono dare al disegno.

Dovendo dunque costrurre la squadratura del foglio con dimensioni date, sarà conveniente adottare un altro metodo. Questo rappresentato nella tavola A è abbastanza semplice, offre poche linee di costruzione da cancellare, dà sempre un rettangolo esatto, e lascia margini simmetrici intorno al foglio.

Si tiri la retta $A B$ congiungente i punti medii dei lati minori del foglio, e fatto centro successivamente nei suoi estremi, cioè in *A* e in *B*, si descrivano gli archi che si tagliano in *C* e in *D*, che congiunti con una retta, determinano una perpendicolare nel punto *E* della *A B*. Centrando ora in *E*, e presa la metà della lunghezza che si vuol dare al lato maggiore, si determinino i punti *F* e *G*, e centrando sempre in *E*, con la metà della lunghezza da darsi al lato minore, si determinino i punti *H* ed *I*. Centro in *F* e in *G*, con raggio eguale a *E H*, si descrivano i quattro archi *L*, *M*, *N*, *O*, e centro in *H* e *I*, con raggio eguale ad *E F*, si descrivano quattro archi che intersecheranno i quattro primi, determinando i punti *L*, *M*, *N*, *O*, che congiunti fra loro dànno la squadratura richiesta.

Tavola B.

SCRITTURE ADOPERATE NEI DISEGNI.

Sia per le intestazioni delle singole tavole, e per le altre indicazioni da ripetersi su ogni foglio (come alla tavola A), sia per le lettere che si usano mettere nelle varie figure per facilitarne la spiegazione, si fa uso di caratteri stampati semplici e regolari. Tali sono la *Capitale inclinata*, la *Romana inclinata* e l'*Italica*: quest'ultima è usata a preferenza, perchè di semplice e spedita esecuzione, potendosi scrivere senza bisogno di abbozzo a matita. Queste scritture debbono riuscire nitide e con chiaroscuro conveniente, mantenendo le dovute proporzioni fra le lettere maiuscole e le minuscole. La tavola B dà gli alfabeti di questi caratteri ed alcuni esempi in varie grandezze per intestazioni di tavole.

Avvertenze generali per la buona riuscita dei disegni.

Chi, nuovo all'arte del disegno, incomincia la copia di questi modelli, abbia presenti questi avvertimenti:

1º Mantenga la massima pulitezza nel disegno, e compia sempre l'intera tavola completamente a matita prima di ripassare le figure ad inchiostro.

2º Tracci le linee a matita, il più possibilmente leggiere, adoperi quindi una matita dura (N. 4 o N. 5), alla quale farà una punta lunga e tagliata a scalpello, come quella che dà tratti sottili e nitidi per più lungo tempo.

3° Sciolga bene l'inchiostro, in modo che riesca perfettamente liquido e scorrevole, perchè possa liberamente scorrere fra le laminette del tiralinee e mantenga il tiralinee della massima nettezza, avendo cura di pulirlo ed asciugarlo prima di riporlo nell'astuccio.

4° Abbia sempre cura di tracciare a matita le linee parallele quando deve scrivere sui disegni, perchè ciò contribuisce grandemente a dare un insieme aggradevole al disegno.

5° Mantenga una giusta intonazione nella forza dei tratti del disegno con quelli della scrittura.

PARTE PRIMA.

PROBLEMI GRAFICI DI GEOMETRIA

Tavola I.

PERPENDICOLARI. — ANGOLI.

Fig. 1. — **Tracciare la perpendicolare che passa pel punto medio del segmento dato AB.**

Fatto successivamente centro in A ed in B, e con raggio maggiore della metà di AB, si descrivano le due intersezioni C e D. La congiungente di questi due punti è la retta domandata.

Dalla eguaglianza dei due triangoli DAC e DBC si ricava l'eguaglianza dei due angoli ACD e DCB, quindi CD è bisettrice dell'intero angolo ACB, ma il triangolo ACB è isoscele, dunque CE è perpendicolare alla AB e cade in E suo punto medio.

Fig. 2. — **Innalzare la perpendicolare nel punto *A* dato sopra la retta *B C*.**

Si prendano a partire da *A*, nelle due direzioni opposte, due segmenti arbitrari ed eguali sulla retta data, quindi con centro nei punti *D* ed *E* e con raggio maggiore della metà della loro distanza, si facciano intersecare i due archi in *F*. La retta che congiunge *F* con *A* è la perpendicolare richiesta, perchè dalla eguaglianza dei due triangoli *A D F* ed *A E F* ne segue l'eguaglianza dei due angoli *D A F* ed *F A E*.

Fig. 3. — **Innalzare la perpendicolare all'estremo *B* di una retta data *AB*, senza prolungarla.**

Facciasi centro in un punto preso ad arbitrio, per esempio in *C*, e con raggio *C B* si descriva un arco di circolo che incontrerà la *A B* in *D*, si prolunghi la congiungente *D C* fino ad incontrare l'arco in *E*. Congiunto *E* con *B*, si avrà l'angolo *D B E*, che per essere iscritto in una semicirconferenza è retto.

Fig. 4. — **Condurre la perpendicolare alla retta data *B C*, la quale passi pel punto *A* dato fuori della retta.**

Con centro in *A* si descriva un arco di circolo che tagli la retta data in due punti *D* ed E, si faccia centro successivamente in D ed in E, e con raggio arbitrario, si ottenga l'intersezione F.

Congiunto F con A si avrà la retta che partendo da A taglia perpendicolarmente la retta data, per le ragioni esposte per la figura 1ª.

Fig. 5. — **Sul punto A del segmento BC costruire un angolo eguale all'angolo dato NMO.**

Fatto centro in A, e nel vertice M dell'angolo dato, si descrivano due archi di raggio arbitrario ed eguale, indi si porti sull'arco GF la corda DE. Gli angoli FAC ed NMO sono eguali perchè i due triangoli risultanti FAG e DME sono eguali.

Fig. 6. — **Dal punto A dato fuori della retta BC, condurre una retta che formi colla BC un angolo eguale all'angolo dato NMO.**

Da un punto qualsiasi della retta si faccia la copia dell'angolo dato (figura precedente), indi dal punto dato A si conduca la parallela a GF, che formerà colla BC un angolo eguale all'angolo dato, perchè gli angoli AIC e GFC sono corrispondenti fra parallele intersecate da una terza retta, e l'angolo in F è eguale all'angolo dato per costruzione.

Tavola II.

DIVISIONE DEGLI ANGOLI. — PARALLELE.

Fig. 7. — **Dividere un angolo dato per metà.**

Si faccia centro nel vertice dell'angolo, e con un raggio arbitrario si descriva l'arco *D E*, centro quindi successivamente nei due punti *D* ed *E* si ottenga l'intersezione *F*. La retta che congiunge il punto *B* col punto *F* è la bisettrice dell'angolo, èssendo il punto *F* equidistante dai due lati.

Fig. 8. — **Condurre la bisettrice dell'angolo formato dalle due rette *AB* e *CD*, il cui vertice cade fuori del campo del disegno.**

Condotte due parallele alle rette date, in modo che siano da queste ad una distanza comune, e che si taglino fra loro in *I*, si biseca l'angolo risultante col vertice in *I* (problema precedente) e la *NO* sarà la bisettrice richiesta.

Essendo *NO* la bisettrice dell'angolo *LIM*, sono eguali i due angoli in cui questo è diviso, ed eguali quindi sono le coppie di angoli (LIO ed AB, NO) (ed OIM ed NO, CD) perchè corrispondenti fra rette parallele tagliate da una terza: sono dunque eguali fra loro anche gli angoli AB, NO ed NO, CD.

Fig. 9. — **Id. (2ª soluzione).**

Prendansi due punti ad arbitrio E ed F sulle due linee e si congiungano fra loro: la retta EF determina colle rette date quattro angoli ai quali si conducono le bisettrici: queste si taglieranno a due a due nei punti G ed H. Essendo questi punti comuni a due bisettrici saranno equidistanti dai lati dell'angolo da esso formato e quindi equidistanti dai lati dell'angolo dato. La retta quindi che passa per G ed H è la bisettrice dell'angolo AB, CD.

Fig. 10. — **Trisezione dell'angolo retto.**

Descrivasi un arco di circolo con centro in B e con raggio arbitrario, con centro quindi nei punti D ed E e collo stesso raggio adoperato si descrivano gli archi BF, BG, che tagliando l'arco prima descritto in F e in G determinando i punti pei quali passano le due rette BF, BG che dividono l'angolo retto in tre parti eguali.

Essendo i due triangoli *D B G* ed *F B E* equilateri, ne risulta che i due angoli *D B F* e *G B E* saranno di 30^0 perchè complementari di angoli di 60°, e così anche l'angolo *FBG* sarà di 30^0 perchè complementare dei due angoli *D B F*, *G B E* che presi insieme valgono pure 60^0.

Fig. 11. — **Condurre una retta parallela alla retta data *AB*, in modo che i suoi punti abbiano dalla *A B* una distanza data *C*.**

Scelti due punti *D* ed *E* sulla retta data, s'innalzano, da questi, due perpendicolari indefinite sulle quali si porta il segmento dato *C*: congiunti i due punti risultanti *F* e *G* con una retta, questa sarà la parallela cercata.

Fig. 12. — **Dal punto dato *A* fuori della retta *BC* condurre a questa una parallela.**

Con centro in un punto qualsiasi *D*, preso sulla retta *B C*, e con raggio *D A*, si descriva l'arco *A E*, indi con centro in *A*, e collo stesso raggio *D A*, si descriva l'arco *D F*, su cui si porta la corda *A E*, fissando così l'estremo *F*, che congiunto con *A*, darà la parallela richiesta, perchè gli angoli corrispondenti *F A D* ed *A D C* sono eguali per costruzione.

Tavola III.

DIVISIONE DELLE RETTE IN PARTI EGUALI.

SEGMENTI PROPORZIONALI.

Fig. 13. — **Dividere la retta data *AB* in *n* parti eguali, per esempio: in 7.**

Conducasi dall'estremo *A*, una retta indefinita di direzione arbitraria, sulla quale si prenderanno sette segmenti eguali pure arbitrari: si congiunga il punto estremo di tali segmenti con *B*, e dagli altri punti di divisione si conducano le parallele alla 7 *B*, le quali taglieranno la *A B* in sette eguali segmenti.

Le due linee *A* 7 e *A B* essendo segate dalle parallele 11′, 22′, 33′, ecc. sono da queste divise in parti proporzionali, essendo quindi i segmenti *A* 1, 12, 23, 34, ecc. eguali per costruzione, saranno anche eguali fra loro i segmenti *A* 1′, 1′2′, 2′3′ 3′4′, ecc., in cui resta divisa la retta data *AB*.

Fig. 14. — **Id. (2ª soluzione), per esempio: in 5.**

Prendansi, su di una linea indefinita *AB*, cinque segmenti arbitrari ed eguali fra loro $A1$, 12, 23, 34 e 45, e sull'intero segmento $A5$ si costruisca il triangolo equilatero, congiungendo il vertice C con ciascuno dei punti 1, 2, 3 e 4. Si porti ora il segmento dato a, a partire da C, sui lati CA e $C5$, e si congiungano i punti D ed E. Il segmento DE è eguale ad a perchè il triangolo CDE è equilatero. Le due parallele DE e $A5$ sono divise in parti proporzionali dalle seganti partenti da C, ma le suddivisioni della AB essendo eguali per costruzione, saranno anche eguali i cinque segmenti in cui è divisa la retta DE.

Fig. 15. — **Dividere il segmento dato** a **in parti proporzionali alle parti in cui è diviso il segmento dato** AB.

Conducasi da A una retta indefinita di arbitraria direzione, e su questa si prenda $AC = a$, e congiunto C con B con una retta, si conducano a questa tante parallele dai punti c, d, e, f, g ed h che incontreranno la AC nei punti c', d', e', f', g' ed h' dividendola in parti che sono proporzionali ai segmenti della retta data.

Fig. 16. — **Dividere due o più segmenti dati in parti proporzionali ad altri segmenti dati** c, d, e, f, g, h.

Su una retta indefinita AB si prendano i segmenti AC, CD, DF, EF, ecc.: rispettivamente eguali ai segmenti dati: sulla loro somma AH si costruisca il triangolo equilatero e si congiunga il vertice I coi punti C, D, E, F e G. A partire da I si portino sui due lati IA e IH i segmenti a e b, e si congiungano i punti L ed M ed i punti N ed O, ottenendo così i due segmenti LM ed NO rispettivamente eguali ad a e b che, dalle seganti condotte da I, saranno divisi in parti proporzionali ad AC, CD, DE, ecc., cioè a c, d, e, f, g ed h.

Fig. 17. — **Trovare il segmento quarto proporzionale rispetto ai tre segmenti dati** a, b, c.

Tracciate due linee indefinite da un punto A, si prendano sulla prima i segmenti $AB=a$ e $AC=b$: sulla seconda $AD=c$ e congiunto B con D, si tiri da C la parallela a BD, che determinerà l'estremo E del segmento cercato AE.

Fig. 18. — **Costruire il segmento medio proporzionale fra i due segmenti dati** a **e** b.

Su una retta indefinita, si prenda $AB=a$, e $BC=b$, e su AC, come diametro, si descriva una circonferenza. Dal punto B si innalzi la perpendicolare alla AC. BD è il segmento cercato perchè la perpendicolare abbassata dal vertice di un triangolo sull'ipotenusa è media proporzionale fra i due segmenti in cui questa resta divisa.

Tavola IV.

TRIANGOLI.

Fig. 19. — **Costruire il triangolo, dati i tre suoi lati** a, b, c.

Tracciato, come base del triangolo, un segmento AB, eguale al lato a, facciasi centro successivamente ai suoi punti estremi, e con aperture di compasso, rispettivamente eguali ai lati a e b, si descrivano due archi che si intersecheranno nel punto C determinando così il terzo vertice del triangolo che si dovrà congiungere con due rette ai vertici A e B.

Questa soluzione è possibile quando la somma dei due lati a e b è maggiore e la loro differenza è minore di c.

Fig. 20. — **Costruire il triangolo equilatero conoscendosi il suo lato** a.

Fatto $AB = a$, si faccia centro successivamente nei due estremi A e B, e con raggio eguale ad a si descriva l'intersezione in C, e si congiunga questo punto con A e con B.

Questo problema quindi può considerarsi come un caso speciale del problema precedente.

Fig. 21. — **Costruire il triangolo conoscendo i due lati a e b e l'angolo fra essi compreso γ.**

Tracciato $AB = b$, si faccia nel suo estremo B, la copia dell'angolo dato γ (vedi fig. 5), si porti sul lato BC un segmento eguale ad a, e si congiunga C con A. Il triangolo risultante ABC è quello domandato.

Fig. 22. — **Conoscendo il lato a e i due angoli adiacenti β e γ costruire il triangolo.**

Agli estremi di AB, presso eguale ad a, si faccia la copia dei due angoli β ed γ, i cui lati prolungati si intersecheranno in un punto C, che sarà il terzo vertice del triangolo richiesto.

Questa soluzione è possibile quando la somma dei due angoli dati è minore di due retti.

Fig. 23. — **Costruire il triangolo di cui si conoscono i due lati b e a e l'angolo α opposto al lato a.**

Nell'estremo A di una retta indefinita, si faccia la copia dell'angolo dato α, e sul lato AB si porti un segmento eguale a b. Si faccia ora centro nel vertice B e con raggio eguale ad a si tagli il segmento base nei punti C e C'. Ognuno di questi due punti soddisfa egualmente alle condizioni richieste, e si hanno così due soluzioni: la prima dà il triangolo ABC, la seconda il triangolo ABC', perchè il lato a è maggiore della distanza del vertice B dalla base.

Si ha una sola soluzione quando il lato a è eguale o maggiore di b, oppure quando è eguale alla distanza del vertice B dalla base, e in questo caso il triangolo è rettangolo.

La soluzione è impossibile quando il lato a sia dato minore della distanza di B dalla base.

Fig. 24. — **Costruire il triangolo di cui sono dati i due angoli α e β ed il lato a opposto all'angolo α.**

Nel punto A di una retta indefinita, si faccia la copia dei due angoli dati, prima dell'angolo che dovrà risultare opposto al lato

a, indi dell'altro angolo, adiacenti e col vertice nel punto comune A. Si faccia $AD = a$, e dal punto D si conduca la parallela alla CA, che incontrerà la base nel punto E. Il triangolo risultante ADE è il domandato perchè l'angolo $DEA = CAB = \alpha$ perchè corrispondenti, e $EDA = DAC = \beta$ perchè alterni-interni.

La soluzione è possibile quando la somma dei due angoli α e β è minore di due retti.

Tavola V.

QUADRILATERI.

Fig. 25. — **Dato il lato a costruire il quadrato.**

Preso $BA = a$ si costruisca, in uno dei suoi estremi, un angolo retto, e si porti a sul lato indefinito; centro in B e in C sempre con raggio eguale ad a, si descrivano i due archi che si tagliano in D.

Congiungendo D con B e con C si otterrà il quadrato richiesto.

Fig. 26. — **Costruire il rettangolo dati i due lati a e b.**

Preso $AB = a$, come base, e costruito un angolo retto in un suo estremo, si faccia $CA = b$, quindi con centro in B e raggio b, e con centro in C e raggio a si ottenga l'intersezione D. Congiunto D con C e con B si otterrà il rettangolo voluto.

Fig. 27. — **Costruire il parallelogramma dati i due lati a e b e l'angolo α da essi formato.**

Preso come base $AC = b$, si faccia nel suo estremo A la copia dell'angolo α e si prenda $AB = a$: centro in B e raggio b, e centro in C e raggio a si procuri il punto D, che congiunto con B e con C completerà la figura.

Fig. 28. — **Date le diagonali a e b costruire il rombo o losanga.**

Preso $AB = b$ si costruisca la perpendicolare nel suo punto medio, indi, a partire da m si prenda $mC = mD = \frac{a}{2}$ e si congiungano fra loro gli estremi A, C, B, e D. La figura risultante è un rombo perchè ha le diagonali che si tagliano scambievolmente per metà ad angolo retto.

Fig. 29. — **Costruire il trapezio dati i quattro lati a, b, c, d.**

Siano a e b i due lati inclinati, e c e d le due basi parallele.

Preso $AB = d$ si porti su questa la base minore c, quindi $CB = d - c$: con centro B e raggio a, e con centro C e raggio b si ottenga il punto D, e poi con centro in D e raggio c, e con centro in A e raggio b si ottenga il vertice E.

Congiungendo ora A con E, E con D e D con B, la figura risultante è un trapezio.

La soluzione è possibile quando può costruirsi il triangolo CDB, cioè quando la differenza delle due basi è minore della somma dei due lati inclinati, e maggiore della loro differenza.

Fig. 30. — **Costruire un quadrato, di cui è data la differenza d fra il lato e la diagonale.**

Nell'estremo A della retta indefinita AD si innalzi una perpendicolare, e sui lati dall'angolo retto si prenda $AB = AC = d$, e si porti CB in seguito ad AB.

Il segmento AD sarà il lato del quadrato richiesto, perchè il lato di un quadrato è eguale, alla differenza fra il lato e la diagonale più l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele i cui cateti sono eguali alla differenza stessa.

Tavola VI.

TANGENTI.

Fig. 31. — **Condurre una retta tangente ad una circonferenza data, nel suo punto *A*.**

Fatto centro in *A*, e con raggio eguale ad *AB*, si descriva l'arco di circolo che taglia la circonferenza data in *C*, si prolunghi il raggio *BC*, e con centro in *C* si descriva una semicirconferenza, la quale determinerà il punto *D*. La *DA* sarà la tangente perchè normale al raggio *A B*, essendo l'angolo *B A D* iscritto in una semicirconferenza e quindi retto.

Fig. 32. — **Pel punto *A*, preso fuori della circonferenza, condurre le due tangenti alla circonferenza stessa.**

Si congiunga il punto *A* col centro *B* della circonferenza data, e con centro nel punto medio *C* e con raggio *C B* si descriva l'arco *D B E*. Gli angoli *B D A* e *B E A* sono retti perchè ciascuno è iscritto in una semicirconferenza, quindi, le $A D$ e $A E$ essendo perpendicolari ai raggi condotti ai punti di contatto, sono tangenti alla circonferenza data.

Fig. 33. — **A due circonferenze date, condurre due tangenti comuni.**

Si costruisca con centro in A (centro del circolo maggiore) una circonferenza il cui raggio sia la differenza dei raggi dei circoli dati, e con centro nel punto medio D della congiungente i centri, e raggio $D A$ si tracci un arco che taglierà la circonferenza in E ed in F; si conducano i raggi $A E$ ed $A F$ prolungandoli fino ad incontrare la circonferenza maggiore in G e in H; dal centro B si conducano i raggi $B I$ e $B L$ paralleli, e diretti nello stesso senso, ai raggi $A G$ ed $A H$. Le rette che congiungono I con G ed H con L sono le tangenti richieste.

Osservando ora il quadrilatero $G E B I$, diremo che è un parallelogramma perchè i due lati $E G$ e $B I$ sono eguali e paralleli per costruzione, ma è un rettangolo perchè ha l'angolo $G E B$ retto perchè supplementare dell'angolo $A E B$ che è retto: le due tangenti quindi sono perpendicolari ai raggi che vanno ai punti di contatto.

In questo primo caso le tangenti hanno le due circonferenze dalla stessa parte.

Fig. 34. — **A due circonferenze date, condurre due tangenti comuni (2ª soluzione).**

Con centro in A (centro del circolo maggiore) si descriva una circonferenza il cui raggio sarà la somma dei raggi dei due circoli dati, poi centro nel punto medio D della congiungente AB, si descriva l'arco EAF che taglierà l'arco descritto in E ed in F. Si tirino i raggi AE ed AF, e dal centro B si conducano i due raggi BI e BL, paralleli, e diretti in senso opposto ai due raggi AE ed AF. Le rette GL ed IH sono le due tangenti, perchè, avendo il quadrilatero $EGLB$ due lati eguali per costruzione e l'angolo AEB retto (perchè iscritto in una semicirconferenza), esso è un rettangolo, e quindi la GL è perpendicolare ai raggi AG e BL, ecc.

In questo secondo caso le tangenti si tagliano fra loro ed hanno le due circonferenze date, una da una parte ed una dall'altra.

Fig. 35. — **Descrivere le quattro circonferenze tangenti alle tre rette date che si tagliano a due a due.**

Si bisechino i tre angoli interni formati dal triangolo *A B C*, e il punto comune *O* delle tre bisettrici sarà il centro della circonferenza iscritta, che avrà per raggio la lunghezza comune delle perpendicolari abbassate sui tre lati. Si bisechino ora gli angoli esterni formati dal triangolo, e le bisettrici si incontreranno a due a due determinando i punti O', O'', O''', che saranno i centri delle circonferenze ex-iscritte al triangolo, i raggi delle quali saranno pure determinati dalle perpendicolari condotte dai centri alle rette date.

Se l'operazione è fatta esattamente, i prolungamenti delle bisettrici dei tre angoli interni del triangolo, devono passare pei centri dei circoli ex-iscritti.

Fig. 36. — **Descrivere tre (o più) circonferenze tangenti fra loro e tangenti alla circonferenza data.**

Si divida la circonferenza data in sei parti eguali e si traccino i diametri *AB*, *CD*, *EF*: si prolunghi indefinitamente il diametro *B A* e si conduca la tangente nel punto *C* che incontrerà il diametro prolungato in *G*. Si conduca la bisettrice dell'angolo *C B G* che determinerà il punto *H*: *H C* è il raggio dei circoli iscritti, basterà quindi portare CH in FH' ed FH' e descrivere le circonferenze.

Volendo iscrivere un numero maggiore di circoli, l'operazione non varia: basta solo dividere la circonferenza in un numero di parti doppio del numero dei circoli voluti.

Tavola VII.

RACCORDAMENTI.

Fig. 37. — **All'estremità B del segmento AB, raccordare uno o più archi di circolo.**

Si conduca una perpendicolare all'estremo della retta data, e si prendano a piacere sulla perpendicolare i punti C, D, E, ecc., e facendo centro nei medesimi, con raggi rispettivamente eguali a CB, DB, EB, ecc., si descrivano tanti archi di circolo che saranno raccordati colla retta data, perchè tangenti alla retta stessa nel punto di raccordamento.

Fig. 38. — **Raccordare le due rette AB e BC mediante un arco di raggio A.**

Si conducano due parallele alle rette date, distanti quanto il raggio dato a; dal punto d'incontro D si abbassino le perpendicolari alle rette date in E ed in F, e con centro in D e raggio a, si descriva l'arco EF.

Fig. 39. — **Raccordare le due parallele AB, CD mediante una semicirconferenza.**

Facciasi BD perpendicolare alle due parallele, e con centro nel punto medio E si descriva la semicirconferenza, che essendo tangente alle due parallele nei punti B o D è perciò raccordata.

Fig. 40. — **Raccordare all'estremo C di una retta data, un arco di circolo che passi pel punto A preso fuori della retta.**

S'innalzi la perpendicolare sul punto medio D del segmento che congiunge C C con A, e si abbassi la perpendicolare dall'estremo C che incontrerà l'altra perpendicolare in E e quindi con centro in E e raggio EC si descriva l'arco CA.

Fig. 41. — **Raccordare le due parallele date AB e CD, di lunghezza diversa, mediante due archi di cerchio.**

Congiunto A con C, e prolungate le due rette in E ed in F, di una quantità eguale alla metà della AC, si congiungano i punti E ed F. Si costruiscano quindi le bisettrici dei due angoli risultanti in E ed in F, e dai punti A e C si conducano le perpendicolari alle due rette date: queste perpendicolari incontreranno le bisettrici nei punti I ed H, che saranno i centri dei due archi voluti, i cui raggi saranno IA ed HC. Il punto di raccordamento, dei due archi fra di loro, si ottiene prolungando la congiungente dei due centri I ed H fino in G punto medio della EF.

Essendo la distanza dei centri eguale alla differenza dei raggi, i due archi sono raccordati.

Fig. 42. — **All'estremità B dell'arco dato di centro A, raccordare un altro arco di circolo avente il raggio dato a.**

Sul prolungamento del raggio AB si porti $BC = a$, e quindi con centro in C e raggio CB si descriva l'arco di circolo che raccorda coll'arco dato perchè la distanza dei centri è eguale alla somma dei raggi.

Tavola VIII.

DIVISIONE DELLA CIRCONFERENZA IN PARTI EGUALI POLIGONI REGOLARI ISCRITTI.

Fig. 43. — **Iscrivere un quadrato in una circonferenza.**

Si conducano due diametri perpendicolari fra loro, e se ne congiungano gli estremi *A*, *B*, *C* e *D* che determineranno il quadrato richiesto.

Fig. 44. — **Iscrivere un ottagono in una circonferenza.**

Tracciati i due diametri *A E* e *G C* fra loro perpendicolari, si bisechino i quattro angoli retti da essi formati, e si avranno sulla circonferenza gli otto punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* ed *H*, che congiunti fra loro dànno l'ottagono cercato.

Fig. 45. — **Iscrivere un esagono regolare in una circonferenza data.**

Essendo il lato dell'esagono regolare eguale al raggio del circolo circoscritto, basta portare sei volte il raggio sulla circonferenza data, e congiungere fra loro i vertici così ottenuti *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ed *F*.

Fig. 46. — **In una circonferenza data iscrivere un pentagono regolare.**

Si conducano i due diametri perpendicolari *AB* e *CD*, e dal punto medio *E* del raggio *CO*, e con raggio *EA*, si descriva l'arco *AF*.

Il segmento *AF* è il lato del pentagono perchè è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti il raggio, e la parte maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione. Portando quindi *AF* cinque volte sulla circonferenza si avrà il pentagono cercato.

Fig. 47. — **Iscrivere il decagono in una circonferenza data.**

Tracciati due diametri fra loro perpendicolari, si faccia centro nel punto *B*, medio di *OA*, e con raggio *BO* si descriva una semicirconferenza, e si congiunga *B* con *C*. Il segmento *DC* sarà il lato del decagono perchè è la parte maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione.

Fig. 48. — **Iscrivere il pentedecagono regolare nella circonferenza data.**

Si ripetano le due operazioni per iscrivere nella circonferenza l'esagono e il decagono (fig. 45 e 47) e siano: AB il lato dell'esagono, ed AC il lato del decagono. La corda BC è il lato del pentedecagono iscritto, perchè la corda sottesa all'arco differenza fra $^1/_6$ e $^1/_{10}$ della circonferenza.

Tavola IX.

COSTRUZIONE DI POLIGONI DI LATO DATO.

Fig. 49. — **Costruire il pentagono regolare di lato dato l.**

Preso $AB = l$ si faccia centro nel suo estremo B, e con raggio AB, si descriva l'arco AC: si innalzi quindi la perpendicolare all'estremo B, fino ad incontrare l'arco descritto in D, e quindi con centro nel punto medio E del lato AB e con raggio ED si descriva l'arco DF che taglierà il prolungamento del lato in F.

Il segmento AF è la diagonale del pentagono, perchè composta di metà del lato (AE) più l'ipotenusa (DE) di un triangolo rettangolo, di cui i cateti sono: il lato, e metà del lato.

Ora, facendo centro in A e con raggio AF, si ottenga l'intersezione C: similmente si ottenga il punto G, e centro successivamente in A e in B, con raggio AF si faccia l'intersezione H. Congiunti per ultimo i punti A, G, H, C, B si avrà il pentagono.

Fig. 50. — **Costruire il pentagono regolare di lato dato l (2ª soluzione).**

Preso $AB = l$, con centro in B, e raggio BA, si descriva una semicirconferenza che incontrerà il prolungamento del lato in E: s'innalzi quindi la perpendicolare in B, e se ne congiunga l'estremo D col punto medio F di BE. Ora, centro nel punto F e raggio FB si descriva la semicirconferenza che taglierà la DF in G. Il segmento DG, che è la parte aurea del raggio BD portato in DH, è il lato del decagono regolare iscritto nel circolo di raggio BD, quindi l'angolo DBH sarà $\frac{360^0}{10}$ cioè 36°. Si conduca la bisettrice dell'angolo DBH, e si avrà quindi l'angolo $DBI = 18^0$, ma l'angolo ABD è retto, quindi:

$$ABD + DBI = 90^0 + 18^0 = 108^0$$

che è appunto il valore dell'angolo del pentagono, cioè $^6/_5$ di angolo retto. Conoscendo l'angolo, si conosce la diagonale, e quindi si completa la figura come nel problema precedente.

Fig. 51. — **Costruire il decagono regolare dato il lato** l.

Fatto $AB = l$, s'innalzi la perpendicolare sul suo punto medio, e si conduca una parallela dall'estremo B, sulla quale si prenda $BD = AB$. Con centro in C e raggio CD si descriva l'arco DE che incontrerà il prolungamento del lato in E, e con centro in A e raggio AE si tracci l'arco EO che determinerà, sulla perpendicolare CO, il punto O.

Facendo ora centro in O e raggio OA si descriva una circonferenza nella quale il lato dato AB sarà contenuto dieci volte, perchè dalla costruzione risulta che AB è la parte maggiore di AE diviso in media ed estrema ragione, ed $AE = AO$.

Fig. 52. — **Costruire l'ottagono regolare dato il lato** l.

S'innalzi la perpendicolare sul punto medio di $AB = l$, e con centro in C e raggio CA si descriva la semicirconferenza che incontra la perpendicolare in D: centro in D e raggio

DA si descriva una seconda circonferenza che taglia la perpendicolare in *O*, che è il centro dell'ottagono. Si descrive quindi la circonferenza, nella quale il lato dato è contenuto otto volte, perchè l'angolo *AOB* è di 45^0 ($^1/_8$ di 4 retti) perchè essendo alla periferia è la metà dell'angolo *ABD* che è retto ed è al centro della stessa circonferenza. Risulta quindi che *CO*, che è l'apotema dell'ottagono, è eguale a metà del lato più l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di lato eguale alla metà stessa del lato dato.

Fig. 53. — **Costruire il dodecagono regolare dato il lato** ***l.***

S'innalzi la perpendicolare nel punto medio di $AB = l$, e centro in *A* e in *B* e raggio *AB* descrivansi gli archi *BD* e *AD*. Centro ora in *D*, e con raggio *DA*, si descriva una circonferenza che incontrerà la perpendicolare nel punto *O* che è il centro del dodecagono. Con raggio *OA* e centro in *O* si descriva la circonferenza in cui il lato dato è contenuto dodici volte, perchè l'angolo *AOB* essendo misurato dalla metà dell'angolo *ADB*, che è di 60°, (perchè angolo di un triangolo quadrilatero) è appunto di 30° ($^1/_{12}$ di 4 retti).

Fig. 54. — **Dato il lato l costruire un poligono regolare di n lati: per esempio un pentadecagono.**

Si iscriva un pentadecagono in una circonferenza qualsiasi, e se ne prolunghi un lato, per esempio AB, e si prenda $AC = l$; da C si conduca la parallela ad OA che incontrerà in D il raggio OB, Centro ora in O e raggio OD si descriva una circonferenza sulla quale i raggi partenti da O, e che passano pei vertici del primo poligono, determinano i vertici del pentadecagono di lato l, perchè $ACDE$ essendo un parallelogramma, $ED = AC$ ed $AC = l$ per costruzione.

Tavola X.

POLIGONI A STELLA.

Fig. 55. — **Costruire un poligono stellato a cinque punte (10 lati).**

Questo poligono si ottiene dividendo una circonferenza in cinque parti eguali, e congiungendo i punti 1 e 3, 3 e 5, 5 e 2, 2 e 4, 4 e 1. La figura risultante avrà 5 angoli convessi e 5 rientranti.

Fig. 56. — **Costruire un poligono a 6 punte (12 lati).**

Si divida la circonferenza in sei parti eguali e si congiungano i punti 1, 3 e 5 ed i punti 2, 4 e 6. Questa figura è composta dalla sovrapposizione di due triangoli equilateri.

Fig. 57. — **Costruire un poligono stellato a 8 punte (16 lati).**

Divisa una circonferenza in otto parti eguali, si congiungano i punti 1 e 4, 4 e 7, 7 e 2, 2 e 5 ecc.

Si ottiene pure un poligono stellato unendo i punti 1, 3, 5 e 7, ed i punti 2, 4, 6 e 8, ed allora la figura risulta di due quadrati sovrapposti.

Fig. 58. — **Costruire un poligono stellato di 9 punte (18 lati).**

Divisa la circonferenza in nove parti, si uniscano i punti 1, 4 e 7; 2, 5 e 8; e 3, 6 e 9. La figura è evidentemente ottenuta dalla sovrapposizione di 3 triangoli equilateri.

Fig. 59. — **Id. (2ª soluzione).**

In questa figura i punti sono così congiunti: 1, 5, 9, 4, 8, 3 ecc.

Fig. 60. — **Costruire un poligono stellato a sei punte, mediante archi di circolo.**

Divisa la circonferenza in sei parti eguali, si faccia centro nei punti 1 e 2, e con raggio eguale al raggio del circolo, si descrivano gli archi che si tagliano in *A*. Similmente si faccia per gli altri punti, e, sempre col raggio del circolo, si descrivano i sei archi 12, 23, 34, 45, 56 e 61.

Tavola XI.

FIGURE EQUIVALENTI.

Fig. 61. — **Costruire un rettangolo equivalente ad un triangolo dato** *A B C.*

Si abbassi la perpendicolare dal vertice *A* sulla base, e pel suo punto medio *E*, si conduca la parallela alla base *B C*, dai cui estremi si condurranno pure due parallele alla perpendicolare *AD.* Il rettangolo *B C G F* è equivalente al triangolo perchè ha la stessa base e metà altezza.

Fig. 62. — **Costruire un triangolo equivalente al poligono dato** *A B C D E.*

Si conducano le due diagonali *A C* e *A D,* e pei vertici *E* e *B* si conducano le parallele alle diagonali, che incontreranno i prolungamenti della base in F e G. Congiungendo A con F e con G si avrà il triangolo equivalente al poligono dato, perchè i triangoli AFD e AED e i triangoli ABC e AGC sono equivalenti perchè hanno la base comune ed eguale altezza.

Fig. 63. — **Costruire un quadrato equivalente al rettangolo dato $ABDC$.**

Il lato di un quadrato equivalente ad un rettangolo essendo la media proporzionale fra i due lati del rettangolo, si trovi la media proporzionale fra CD e DB (fig. 18) e sul segmento ottenuto DG si costruisca il quadrato.

Fig. 64. — **Costruire un quadrato equivalente al triangolo dato ABC.**

Si trovi il punto medio D dell'altezza del triangolo, e portato DB sul prolungamento di BC, si descriva una semicirconferenza su EC. Il segmento BG, medio proporzionale fra DB e BC è il lato del quadrato, che, pel problema precedente (fig. 63) è equivalente al rettangolo che ha per lati BD e BC, il quale è pure equivalente al triangolo dato ABC (fig. 61).

Fig. 65. — **Costruire un rettangolo di**

cui è dato un lato l, e che sia equivalente al rettangolo dato $ABCE$.

Su una linea indefinita si prenda $EF = CD$, e con centro in E e raggio EF si descriva un arco su cui si prenda $FG = l$ ed $FH = DB$. Si congiunga G con E, e per H si conduca la parallela HI alla GE.

Il segmento FI sarà l'altro lato del rettangolo richiesto, quindi $LMND$ è equivalente a $BACD$ perchè (fig. 17) dalla costruzione della figura ausiliaria si ha:

$$EF : FG :: IF : FH$$

ossia:

$$CD : DL :: ND : DB$$

quindi:

$$CD \times DB = ND \times DL.$$

Fig. 66. — **Costruire un circolo equivalente ai due circoli dati di centro O e O'.**

Il circolo di centro O'' è equivalente alla somma dei due circoli dati perchè costruito con diametro eguale all'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti i diametri dei due circoli dati.

Tavola XII.

OVALE — OVOLO — SPIRALE.

Fig. 67. — **Dato l'asse maggiore** a **costruire l'ovale.**

Preso $AB = a$, si divida in quattro parti eguali: centro in C ed in E con raggio eguale ad $^1/_4$ di AB si descrivano due circonferenze che si toccheranno in D. Facciasi ora centro in C ed in E e con raggio CE si descrivano i due archi che si taglieranno in F ed in G, e si congiungano i punti F e G coi centri C ed E prolungando i raggi fino ad incontrare le circonferenze in L ed M ed in H ed I. Con centro in F e raggio FL si descriva l'arco LM, e collo stesso raggio e centro in G si descriva l'arco HI. Questi due archi toccheranno le due circonferenze prima descritte perchè la distanza dei loro centri è eguale alla differenza dei raggi.

Fig. 68. — **Id. (2ª soluzione).**

Fatto $AB = a$, si divida in 4 parti eguali e centro successivamente nei punti C, D, E, e con raggio eguale ad $^1/_4$ dell'asse si descrivano tre circonferenze. Si conduca in D la perpendicolare all'asse, e pei punti d'incontro F e G si conducano i raggi FC, FE e GC, GE prolungandoli fino ad incontrare le circonferenze in L, M, H, I.

Con centro in F ed in G e con raggio FL si descrivano gli archi LM, HI che toccheranno le due circonferenze di centro C ed E nei punti H, I, L ed M.

Fig. 69. — **Costruire l'ovale dati i due assi a e a'.**

Condotte due rette perpendicolari si prendano sulle stesse, a partire da O, OA è OB eguali alla metà dell'asse maggiore, ed OC e OD eguali alla metà dell'asse minore: si conduca AC, e a partire da C si prenda CF eguale alla differenza AF dei due semiassi e si costruisca la perpendicolare nel punto medio del segmento AF, la quale incontrerà l'asse maggiore in I ed il minore (o il suo prolungamento) in G. Si porti ora OI in OI' ed OG in OL ottenendo così i quattro centri dell'ovale. Con centro nei punti L e G e con raggio GC si descrivano gli archi HM ed NO, e con centro in I ed I' e raggio IA, si descrivano gli archi HAN e MBO. La distanza dei centri è eguale alla differenza dei raggi, quindi i quattro archi sono tangenti cioè raccordati.

Fig. 70. — **Costruire l'ovolo dato l'asse minore** a.

Si innalzi la perpendicolare pel punto medio O di AB, e con centro in O e raggio OA si descriva una circonferenza la quale taglierà la perpendicolare in D. Si conducano ora le due corde AD e BD prolungandole, e quindi con centro in A ed in B, e raggio AB si descrivano i due archi $B\,G$ ed $A\,F$. Centro per ultimo in D, con raggio DF, si descriva l'arco $FE\,G$ che completerà la figura.

L'ovolo risulta composto, evidentemente, di una semicirconferenza e di una semiovale. Nel caso sia dato anche l'asse maggiore si costruirà la semiovale come al problema precedente (fig. 69).

Fig. 71. — **Costruire la spirale d'Archimede.**

Proprietà della spirale è di avere la lunghezza di ciascun raggio vettore proporzionale all'angolo formato dal raggio stesso col raggio condotto al punto d'origine della spirale.

La sua costruzione è la seguente.

Presa una circonferenza qualsiasi, si divide in un numero di parti eguali, per es., in 12, e si tracciano i 12 raggi: si divide un raggio in un numero di parti eguali, per es., in 24, e quindi a partire dal raggio *O I* si portano successivamente sui raggi tracciati, parti 1, 2, 3, 4, 5, 6, ecc., fino a raggiungere la circonferenza.

Congiungansi i punti così ottenuti sui raggi, e si avrà la spirale comune detta d'Archimede.

In questa figura, essendo stato diviso il raggio in un numero doppio di parti di quelle in cui è stata divisa la circonferenza, la spirale compie due spire complete, ed il suo passo è dato da $^{12}/_{24}$ del raggio.

Fig. 72. — **Costruire la spirale mediante archi di circolo.**

Si costruisca il piccolo quadrato 1234 e con centro nel vertice 1 si descriva il circolo di raggio 12, centro poi in 2 si descriva l'arco *A B*, con centro in 3 l'arco *B C*, con centro in 4 l'arco *C D*, con centro in 1 l'arco *D E*, e così di seguito fino ad avere il numero di spire volute.

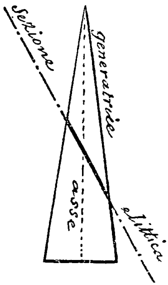
Questa curva è composta di tanti archi di 90° fra loro raccordati.

Il passo della spira è quattro volte il lato del quadrato 1234; quando dunque è dato il passo della spira, non si avrà che a costruire il piccolo quadro con lato eguale ad $^1/_4$ del passo dato.

Tavola XIII.

ELISSE.

L'intersezione di un piano con un cono, che non sia parallelo nè all'asse, nè alla generatrice del cono, dà origine ad una sezione, la cui linea curva è detta elisse.



L'elisse è una curva piana, chiusa, tale che la somma delle distanze di ciascun suo punto da due punti fissi, detti fuochi, è costante ed eguale alla lunghezza dell'asse maggiore ($2a$).

Una costruzione molto facile dell'elisse è quella chiamata del giardiniere, perchè usata per tracciare questa curva sul terreno.

Fissate due punte nei fuochi, si allaccia intorno ad esse un filo, la cui lunghezza totale è l'asse maggiore più la distanza fra i fuochi. Tengasi teso il filo con una matita che si farà scorrere sulla carta: la linea così descritta sarà l'elisse.

L'elisse può anche costruirsi per punti.

Fig. 73. — **Costruire l'elisse dati i due assi** $2a$ **e** $2b$ **mediante una lista di carta.**

Disposti i due assi ad angolo retto e che si taglino rispettivamente per metà in C, si prenda una lista di carta e su questa si prenda a partire da H, HF ed HG eguali ai due semiassi. Si collochi la striscia sugli assi, e si faccia muovere in modo che il punto F sia costantemente sull'asse minore e il punto G sull'asse maggiore. Si segnino sulla carta tutte le diverse posizioni prese dal punto H, e si congiungano con una linea i punti così ottenuti: la linea risultante è l'elisse cercata.

Questo modo di costruzione sostituisce l'uso del compasso elittico, generalmente poco esatto.

Fig. 74. — **Dati i due fuochi** F **ed** F' **e la somma costante dei raggi vettori** $2a$, **costruire l'elisse, e condurvi la tangente e la normale in un suo punto** Y'.

Sia AA' eguale al segmento dato, ed FF' i due fuochi. Si segnino fra un fuoco è il centro della figura, i punti arbitrarî X, X' X'' X''', ecc., e con centro nel fuoco F e raggio XA' si descriva un arco che sarà intersecato in Y dall'arco descritto con centro in F' e raggio AX. Si faccia ancora centro in F e raggio $A'X'$ si descriva l'arco che si taglierà in Y' coll'arco descritto con centro in F' e raggio AX', e si continui l'operazione nello stesso modo per gli altri punti X'', X''', ecc.

Essendo l'elisse simmetrica rispetto agli assi, avremo che per ciascun punto trovato, si potranno avere quattro punti dell'elisse.

Congiunti convenientemente i punti trovati si avrà l'elisse.

Per avere la tangente e la normale alla curva nel punto Y', si conducano per Y' i due raggi vettori, prolungandoli: la bisettrice dell'angolo formato da un raggio vettore e dal prolungamento dell'altro è la tangente, e la bisettrice dell'angolo formato dai raggi vettori è la normale.

Fig. 75. — **Dati i due assi $2a$ e $2b$ costruire l'elisse e condurvi le due tangenti dal punto P preso fuori della curva.**

Occorre, prima di tutto, determinare i fuochi. Disposti i due assi perpendicolarmente, si rammenti che gli estremi B e B' dell'asse minore sono punti della curva; quindi centro in B e con raggio eguale alla metà dell'asse maggiore, si descriva l'arco che taglierà l'asse maggiore nei punti F ed F' che sono i fuochi dell'elisse. Si compia poi la figura col processo del problema precedente.

Dal punto P, come centro, e con raggio eguale alla sua distanza da F' si descriva un arco di circolo, e con centro in F e raggio eguale all'asse maggiore si descriva un arco che taglierà l'arco prima descritto in L ed in L'. Condotte $F'L$, $F'L'$ si abbassino da P le perpendicolari a queste rette, e saranno le tangenti richieste. I punti di contatto T e T si ottengono congiungendo i punti L ed L' col fuoco F.

Fig. 76. — **Dati i due assi $2a$ e $2b$ descrivere l'elisse, considerandola proiezione di un circolo di diametro $2a$.**

Disposti i due assi ad angolo retto, si descrivano due circonferenze di centro C e di diametro rispettivamente eguale ai due assi, e si divida la circonferenza in un numero qualsiasi di parti eguali, per es. in 12, tracciando tutti i raggi, che divideranno anche la circonferenza minore in 12 parti eguali. Dalle divisioni della circonferenza grande si abbassino le perpendicolari all'asse maggiore, che saranno tagliate dalle parallele condotte allo stesso asse dai punti di divisione della circonferenza minore, determinando così una serie di punti, che congiunti convenientemente fra loro, daranno l'elisse cercata.

Tavola XIV.

IPERBOLE. — PARABOLA.

Iperbole. — L'intersezione di un piano con un cono, parallelo al suo asse, dà origine ad una sezione la cui curva dicesi iperbole.

L'iperbole è una curva piana, aperta, composta di due rami simmetrici, e tale che la differenza delle distanze di ciascuno dei suoi punti da due punti fissi, detti fuochi, è costante ed eguale alla distanza fissa $2a$.

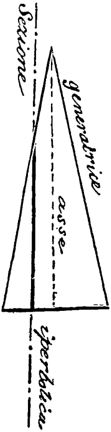
Fig. 77. — **Dati i due fuochi F ed F' e la differenza costante dei raggi vettori $2a$, costruire l'iperbole e condurre ad essa la tangente nel punto P.**

Sia C il punto medio della FF' e si prenda AA' eguale alla distanza data $2a$, ed alcuni punti ad arbitrio sul prolungamento di CF, cioè X, X', X'', ecc. Facendo ora centro punti F ed F', con raggi rispettivamente eguali alle lunghezze AX ed $A'X$, si otterrà l'intersezione Y, e continuando l'operazione nei punti $X'X''$, ecc., si avranno i punti Y', Y'', ecc. che saranno punti della curva perchè

$$YF' - YF = AA' = 2a,$$

$$Y'F' - Y'F = AA' = 2a \text{ ecc.}$$

Essendo la figura simmetrica rispetto ai due assi, potremo avere quattro punti della curva per ogni punto cercato, e congiungendo convenientemente i punti ottenuti coi due vertici A e A', avremo i due rami dell'iperbole.



La tangente alla curva nel punto P si ottiene conducendo i due raggi vettori dal punto dato, e bisecando l'angolo da essi formato.

L'iperbole ammette anche due assi disposti obliquamente rispetto all'asse trasverso, ai quali la curva dell'iperbole si avvicina sempre, senza però mai toccarli, e diconsi asimtoti. Se ne trova la loro posizione nel modo seguente:

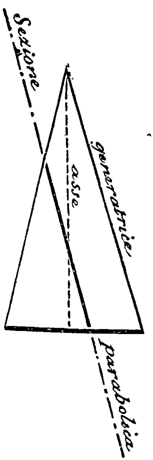
Centro in F con raggio $2a$ si descriva una circonferenza, e da F' si conducano ad essa le due tangenti: le due perpendicolari condotte per C alle tangenti, sono gli asimtoti.

Quando gli asimtoti di una iperbole sono comuni ad altri due rami di un'altra iperbole, il cui asse trasverso è normale all'asse trasverso della prima, le due iperboli si dicono coniugate: se gli asimtoti sono fra loro perpendicolari, l'iperbole si dice equilatera.

Fig. 78. — **Costruire una iperbole data la differenza dei raggi $2a$ ed i fuochi, e condurre ad essa le tangenti dal punto P fuori della curva.**

Ottenuta l'iperbole, come al problema precedente, si traccia il circolo direttore, che ha per centro un fuoco (F) e per raggio $2a$ e con centro nel punto dato P e raggio eguale alla sua distanza dell'altro fuoco (F') descrivasi una seconda circonferenza che taglierà il circolo direttore in L ed L'. Congiunti questi punti con F', le perpendicolari condotte da P

sul punto medio delle due congiungenti saranno tangenti ai due rami dell'iperbole nei punti T e T' dove i raggi vettori FL, FL', prolungati, incontrano le tangenti stesse.



Parabola. — L'intersezione di un piano con un cono, che sia parallelo alla sua generatrice, dà origine ad una sezione la cui linea curva è una parabola.

La parabola è una curva piana, aperta, con un solo vertice, e divisa dall'asse in due rami infiniti ed eguali, e tale, che ciascuno dei suoi punti è equidistante da un punto fisso detto fuoco, e da una retta fissa chiamata direttrice.

Fig. 79. — **Costruire una parabola di cui è data la direttrice** DD' **e il fuoco** F, **e condurre ad essa la tangente in un suo punto** M.

Si determini anzitutto l'asse, costruendo per F la normale alla direttrice, e il vertice V, che sarà il punto medio della distanza del fuoco dalla direttrice.

Presi quindi i punti *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ecc. ad arbitrio sull'asse, si conducano per essi le parallele alla direttrice, e centrando in F e con raggi rispettivamente eguali alle distanze dei punti presi dalla direttrice, si taglino le parallele dalle due parti dell'asse, determinando una serie di punti che congiunti convenientemente con V dànno la parabola, perchè
$A\,A' = A\,F$, $E\,E' = E\,F$, $G\,G' = G\,F$ ecc.

La tangente nel punto M, preso sulla curva, si ottiene bisecando l'angolo formato dalla perpendicolare condotta da M sulla direttrice, e dal raggio vettore $M\,F$.

Fig. 80. — **Data la parabola mediante la sua direttrice ed il fuoco, condurvi le due tangenti dal punto *P* dato fuori della curva.**

Costruita la parabola, come al problema precedente, si faccia centro nel punto P e con raggio $P\,F$ si descriva l'arco che incontrerà la direttrice in M ed N, e si congiungano questi due punti con F. Le perpendicolari abbassate da P sul punto medio di queste congiungenti sono le due tangenti i cui punti di contatto T e T' si trovano nell'incontro delle parallele all'asse condotte da M e da N sulla curva.

Tavola XV.

SCALE SEMPLICI E TICONICHE.

Avviene spesso, che debbasi ritrarre sul disegno una figura in dimensioni diverse dall'originale: bisogna quindi che tutte le varie lunghezze (grafiche) del disegno, corrispondano alle omologhe del modello (reali), e questo si ottiene per mezzo delle scale.

La scala è dunque il rapporto esistente fra le lunghezze grafiche e le corrispondenti reali.

Se, ad esempio, fra due punti del disegno troviamo la distanza di 7^{cm} e fra gli stessi punti dell'originale vi sono 7^{m}, diremo che nel nostro disegno 7^{cm} rappresentano 7^{m} reali, e la scala sarà:

$$\frac{0,07}{7} = \frac{7}{700} = \frac{1}{100}$$

che si indica:

Scala di 1 a 100

o *Scala* $^1/_{100}$

o *Scala 1 : 100*

il che vuol dire che in questo disegno le lunghezze grafiche sono la 100ª parte di quelle reali.

Le scale così indicate si dicono *Scale di proporzione.*

La lunghezza reale si indica con L, la corrispondente grafica con l, ed $^1/_m$ indica il rapporto. Ora esistendo fra l ed L il rapporto $^1/_m$, abbiamo:

$$1 : m = l : L$$

dalla quale si ricavano le tre eguaglianze:

$$l = \frac{L}{m},\ L = l \times m,\ m = \frac{L}{l}$$

cioè:

1.º *Una lunghezza grafica è uguale alla corrispondenza reale divisa pel denominatore della scala.*

2.º *Una lunghezza reale è eguale alla corrispondente grafica moltiplicata per il denominatore della scala.*

3.º *Il denominatore della scala è eguale ad una lunghezza reale divisa per la corrispondente grafica.*

Quando però si abbiano molte lunghezze da misurare su un disegno, l'uso della scala di proporzione riesce lungo e noioso; si sostituiscono quindi le scale grafiche.

La scala grafica è costituita da due rette parallele, di cui la superiore è sottilissima, l'inferiore più grossa, suddivise in parti eguali corrispondenti ad una data unità di misura, secondo la scala di proporzione. A sinistra della divisione segnata zero, il tratto superiore viene prolungato di una divisione e suddiviso in parti più piccole. Le lunghezze lineari rappresentano le quantità grafiche: i numeri scritti sulle divisioni, le corrispondenti reali.

Riportando col compasso le lunghezze grafiche del disegno su questa retta, si hanno quindi le lunghezze reali e viceversa.

Esempio. — Costruire la scala di 1 a 500.

Generalmente bisogna trovare la lunghezza grafica corrispondente ad 1^m, 10^m, 100^m ecc. procurando altresì che le divisioni della scala non siano nè troppo grandi, nè troppo piccole (per esigenze grafiche si limitano fra 2 cm. e 5 millimetri).

Ora, nel nostro caso, si ha che

1^m	del disegno	rappresenta	500^m	reali
$0^m,1$	»	»	50^m	»
$0^m,01$	»	»	5^m	»
$0^m,001$	»	»	$0^m,5$	»

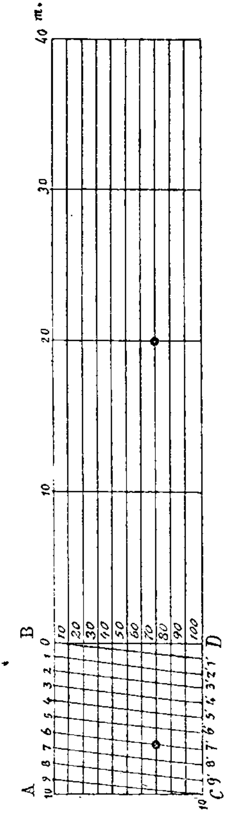
Se dunque un centimetro rappresenta 5^m, raddoppiando avremo che 2 cm. rappresentano 10^m, che è il segmento conveniente per la nostra scala.

Tracciata allora una retta indefinita, si portano su questa, a partire dal suo estremo di sinistra, tante divisioni eguali a 2^{cm} le quali rappresentano ciascuna 10^m reali, e la divisione a sinistra dello 0 si divide in 10 parti eguali che indicheranno i metri.

La più piccola lunghezza reale data da questa scala rappresentando un metro, questa si dirà costruita coll'approssimazione di un metro, il che vuol dire che avremo con esattezza tutte le lunghezze espresse in metri, ma non potremo, su questa scala, prendere lunghezze corrispondenti a frazioni di metro, che dovrebbero essere stimate ad occhio.

Questa scala chiamasi scala grafica semplice.

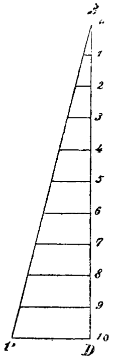
Spesso però può occorrere di dover costruire scale le cui suddivisioni corrispondenti alle lunghezze reali riescano così minute, da rendere il lavoro molto difficile ed anche impossibile. Difatti: supponiamo che, nel caso della scala precedente, si fosse richiesta l'approssimazione di un decimetro, sarebbe stato impossibile dividere la lunghezza grafica di 2^{mm}, che nella scala precedente rappresenta 1^{m}, in 10 parti eguali, per avere le lunghezze corrispondenti a un decimetro.



Si fa uso allora delle scale ticoniche o trasversali le quali, con una semplice costruzione, dànno la suddivisione del più piccolo segmento della scala semplice in un certo numero di parti eguali.

Supponiamo dunque di volere la scala prima ottenuta, nel rapporto di 1 a 500, ma coll'approssimazione di un decimetro.

Si costruisce prima la scala semplice coll'approssimazione che la piccolezza della scala permette, cioè di un metro (come prima è stato fatto) poi si tracciano 10 parallele alla scala, equidistanti, e dai punti di divisione principali, cioè: 10, 0, 10, 20, 30 ecc. si abbassano le perpendicolari fino all'incontro dell'ultima parallela.



Si dividono quindi i due segmenti *AB* e *CD* in 10 parti eguali, e si uniscono trasversalmente le divisioni della *CD* con quello della *AB*, cioè il punto 1′ col punto 0, e così di seguito fino a congiungere il punto 10′ col punto 9.

Da questa costruzione il triangolo 1′ *BD* risulta tagliato dalle 10 parallele, dando origine a dieci triangoli simili, le cui basi (cioè i segmenti intercetti fra le due linee ad angolo), sono proporzionali alle altezze. Ma essendo tutte le parallele equidistanti, le parti fra loro comprese della *BD* saranno eguali, e quindi, per esempio: il segmento della quarta parallela sarà $\frac{4}{10}$ della 1′ *D*, quello della settima sarà $\frac{7}{10}$ ecc., ma il segmento 1′ *D* corrisponde nella nostra scala ad 1^m; avremo quindi che il segmento della prima parallela rappresenta 1 decimetro, quello della seconda due, quello della terza tre.... quello della nona nove decimetri.

Scriveremo quindi di fianco a questi segmenti le cifre 10, 20, 30, 40, ecc., che rappresentano centimetri.

L'uso di questa scala è il seguente: Vogliasi, per es. prendere una lunghezza grafica corrispondente a m. 26,70.

Prenderemo la misura sulla settima parallela, perchè è quella che ha il segmento segnato 70 (70^{cm}) e quindi fissando una punta del compasso su questa parallela all'incontro della perpendicolare che è segnata con 20^{m}; porteremo l'altra punta all'incontro della stessa parallela con l'obliqua che ha l'indicazione di 6^{m}.

Il segmento così preso è composto dei tre segmenti che rappresentano m. 6, m. 0.70 e m. 20, la cui somma è appunto m. 26.70. Similmente si prende qualunque altra misura.

Fig. 81. — **Costruire quattro differenti scale semplici, nei rapporti: 1 a 50, 1 a 8,000 1 a 450 e 3 a 5,000.**

Scala $^1/_{50}$. Si divide un decimetro in cinque parti eguali: ciascuna parte rappresenta 1 metro. Le parti della divisione, a sinistra dello zero, rappresentano decimetri.

Scala $^1/_{8000}$. Si divide un decimetro in 8 parti eguali: ciascuna parte rappresenta 100 m. Le parti a sinistra dello zero rappresentano diecine di metri.

Scala $^1/_{450}$. Un decimetro rappresenta 45 m.: lo divideremo in nove parti: ciascuna rappresenta 5^m, e 2 di queste parti rappresenteranno 10 m. Le suddivisioni a sinistra dello zero rappresentano metri.

Scala $^3/_{5000}$. Se a tre metri grafici corrispondono 5000 metri reali, a 0^m,3 ne corrispondono 500, a 0^m,03, ne corrispondono 50: presi quindi 3 cm. li divideremo in 5 parti, e ciascuna parte rappresenterà 10 m. Così le suddivisioni, a sinistra dello zero, rappresenteranno metri.

Fig. 82. — **Costruire la scala ticonica nel rapporto 1 a 50,000, coll'approssimazione di 10 metri.**

Costruita la scala semplice nel detto rapporto, si tracciano le 10 parallele equidistanti, e si conducono le trasversali. Le suddivisioni della scala semplice, a sinistra dello zero, rappresentano ciascuna 100 m.: i segmenti quindi intercettati fra le due linee ad angolo rappresentano 10, 20, 30,.....90 metri. Dunque l'approssimazione di questa scala data dal suo più piccolo segmento, è di 10 metri.

Similmente può costruirsi qualsiasi altra scala ticonica di rapporto dato.

Copia dei Disegni.

Tavola XVI.

Per copiare un disegno qualsiasi, ossia riprodurlo nelle stesse sue dimensioni, si hanno vari metodi. Alcuni sono meccanici, altri grafici. I mezzi grafici più usati sono i seguenti: 1° Metodo dei triangoli; 2° Metodo delle coordinate; 3° Metodo delle perpendicolari; 4° Metodo della reticola. A seconda della natura o dello scopo del disegno, si sceglierà quel metodo che più si crederà adatto.

Fig. 83. — **Copia di una figura col mezzo dei triangoli o intersezioni.**

Scelgasi una *base* qualsiasi *mn*, che potrà anche essere uno dei lati maggiori della figura stessa, o un lato della riquadratura del foglio del disegno, e si congiunga ciascun vertice della figura coi due estremi m ed n della base. Sul foglio che deve ricevere la copia, si traccia un segmento $m' n'$ eguale ad mn, e su questa nuova base, si costruiscono tanti triangoli eguali (fig. 19, tavola IV) ai triangoli risultanti mCn, mAn, mBn, ecc. Congiunti fra loro i vertici C', A', B', ecc., la figura risultante sarà eguale a quella data.

Fig. 84. — **Copiare una figura per mezzo delle coordinate.**

Si conduca una retta indefinita mn (*asse*) attraverso la figura data, nel senso della sua maggior lunghezza, e dai vertici della figura, si abbassino tante perpendicolari all'asse stesso. Tracciata, sul foglio che deve ricevere la copia, una linea mediana, che costituirà il nuovo asse $m' n'$; si portano su questo i punti a, o, c, b, n, m, ecc. e dai punti a', c', b', d', e' ecc. si innalzano le perpendicolari, mentre dai punti o', n', m', k', ecc. si abbassano altrettante perpendicolari. Su queste perpendicolari si portano quindi rispettivamente i seguenti aB, bB, cC, dD, ecc. e congiunte fra loro le estremità A', B', C', D', ecc., si avrà la figura eguale a quella data.

Fig. 85. — **Copiare una figura col mezzo delle perpendicolari.**

Scelto il lato maggiore della figura, e prolungato ove occorra, si abbassano, su questo le perpendicolari dai vertici della figura. Si traccia quindi una linea indefinita *L' h'* sul foglio destinato alla copia e su questa si portano i punti *L, a, b, c, d,* ecc., dai quali si innalzano altrettante perpendicolari: su queste perpendicolari si portano successivamente i segmenti *a A, b B, c C,* ecc., e congiunti fra loro i punti *L', A', B',* ecc., si avrà la figura eguale a quella data.

Fig. 86. — **Copiare un disegno per mezzo della reticola.**

Quando un disegno da copiare sia molto minuto e frastagliato, od abbia molte linee curve, l'uso dei metodi, ora accennati, ricopre e confonde troppo il disegno di linee di costruzione. Torna perciò più acconcio l'uso della *reticola,* che dà relativamente, minor numero di linee: riesce molto spedito e sufficientemente esatto.

Si contorna il disegno da riprodurre, con un quadro o cornice, dividendone i lati in un numero qualsiasi di parti eguali.

Congiungendo i punti posti di fronte, con linee parallele, tutto il disegno resterà intersecato da un reticolato.

Si costruisca ora, sul foglio che deve ricevere la copia, un rettangolo $p' q' r' s'$, eguale al rettangolo $p\, q\, r\, s$, e come questo, diviso in parti eguali dallo stesso reticolo.

Ciò fatto, si fissano a vista, o meglio col compasso, i vertici della nuova figura $A'\, B'\, C'\, D'\, E'\, F'\, G'\, H'\, I'$, osservando per es.: che il punto A' deve trovarsi sulla orizzontale 2, e fra le due verticali 1 e 2, che il punto B' si troverà in prossimità della perpendicolare 5 e fra le orizzontali 0 e 1. Per le curve si noteranno tutti i punti d'incontro col reticolo a, b, c, d, e, ecc., congiungendo convenientemente fra loro i punti trovati a', b', c', ecc.

Riduzione dei Disegni.

Tavola XVII.

FIGURE SIMILI.

Per riduzione di un disegno, si intende la costruzione di una figura geometricamente simile a quella dell'originale: la riduzione di una figura, può dunque farsi dal grande al piccolo, come dal piccolo al grande.

Generalmente la riduzione si fa, fissando il rapporto che deve esistere fra i lati della figura data e quella cercata, e allora chiamasi *lineare.* Se il rapporto è dato rispetto alla *superficie*, si dice *superficiale.*

Si hanno vari processi di riduzione, alcuni meccanici (compasso di riduzione, pantografo, ecc.), ed altri grafici. Le figure che seguono, dànno alcuni esempi di riduzioni grafiche, coi mezzi più spediti ed esatti.

Riduzione lineare.

Nella riduzione lineare il rapporto può esser dato dalle linee omologhe oppure dal rapporto fra le scale.

Fig. 87. — **Metodo dell'angolo di riduzione.**

Dato un triangolo ABC, costruirne un altro simile, in modo che i loro lati stiano nel rapporto m n.

Su una retta indefinita prendasi *o m* eguale ad *m*, e condotta, da *m*, in direzione arbitraria, una retta, si prenda su questa mn eguale ad n, e si congiunga n con o. L'angolo mon chiamasi *angolo di riduzione.*

Si portino, a partire da o, sul lato om, i lati del triangolo dato, cioè $oa = AC$, $ob = AB$ e $oc = BC$, e pei punti a, b, c, si conducano le parallele alla mn. I segmenti aa', bb', cc', saranno i lati del triangolo richiesto $A'\,B'\,C'$, perchè per la similitudine dei triangoli, le basi mn, aa', bb', cc' sono proporzionali ai lati om, oa, ob, oc.

Il rapporto può anche essere espresso in numeri anzichè per mezzo di linee, ed allora, non si avranno che a costruire due segmenti proporzionali ai numeri dati, e risolvere il problema come nel caso precedente.

Fig. 88. — **Costruire un poligono simile al poligono dato $ABCDEF$, in modo che i loro lati abbiano fra loro il rapporto m, n, servendosi del metodo precedente.**

Costruito anzitutto l'angolo di riduzione coi due segmenti dati m, n, si scompone il poligono in tanti triangoli, tracciando tutte le diagonali da uno stesso angolo, e si fa la riduzione (come al problema precedente) dei singoli triangoli AFE, AED, ADC e ACB, disponendoli nello stesso ordine di quelli della figura data.

Fig. 89. — Riduzione per mezzo della scala di proporzione.

Dato un poligono qualsiasi, nella scala di 1 a 1000, costruirne uno simile nella scala di 1 a 1500.

La figura data è, come nel caso precedente, scomposta in triangoli dalle sue diagonali, ed i numeri indicano le lunghezze reali, rappresentate alla scala del disegno, cioè nel rapporto di 1 a 1000.

Si costruisca anzitutto la nuova scala grafica nel rapporto di 1 a 1500 (semplice o ticonica secondo l'esigenza d'esattezza del disegno) e si faccia la riduzione dei singoli triangoli, disponendoli nello stesso ordine della figura data.

Cominceremo, per es., dal triangolo EAF. Il lato EF è lungo 46^m: si prenda quindi (1 a 1500) la lunghezza grafica che rappresenta 46^m e si porti su una retta indefinita in $E'F'$; preso poi $E'A'$ corrispondente a 36,50 ed $F'A'$ corrispondente a 28,50 e centrando in E' ed in F' si determini il vertice A'. Similmente si opera per gli altri triangoli adiacenti.

Nel caso, che nella figura, sia data la sola lunghezza grafica dei lati, senza l'indicazione in numeri della lunghezza reale, occorrerà, prima di procedere alla riduzione, di misurare col compasso la lunghezza grafica e portarla sulla scala (nel nostro caso 1 a 1000) e *leggere* così la *lunghezza reale* che si deve poi trovare sulla nuova scala (1 a 1500).

Riduzione per mezzo della reticola.

Per ridurre un disegno, può, con molto vantaggio, adoperarsi la reticola, come per la copia.

Supponiamo di voler ridurre la figura 86 (tav. XIV) in una simile, i cui lati stiano a quelli della figura come i numeri 3 e 5.

Trovati i lati omologhi di pq, pr si costruisca il rettangolo $p'q'r's'$ che deve ricevere il disegno ridotto, e se ne dividano i lati nello *stesso numero* di parti eguali con cui furono divisi i lati pq, pr, e si compia il reticolo. I due rettangoli saranno così divisi in un egual numero di quadrati simili, ed abbastanza piccoli da potersi riportare i punti a vista. Si compirà poi la figura in modo analogo a quello adoperato per la copia.

Riduzione superficiale.

Dovendo costruire una figura, simile ad una data, in modo che le loro *aree* stiano in un rapporto dato, bisognerà cominciare a trovare il rapporto fra i lati: basterà allora rammentare il teorema di geometria così espresso; *le aree di figure simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.* Su questo teorema appunto è fondata la costruzione seguente.

Fig. 90. — **Costruire un poligono simile al poligono $ABCDEF$, tale che le loro aree stiano come i segmenti $m'\,n'$.**

Si tracci una retta indefinita, ed a partire da un suo estremo o si porti $o\,m = m'$ ed $m\,n = n'$. Sopra $o\,n$, come diametro, si descriva la semicirconferenza, e da m si innalzi la perpendicolare che incontrerà in v la semicirconferenza, e si traccino le $v\,o$, $v\,n$ indefinite.

Sappiamo dalla geometria, che *in un triangolo rettangolo la perpendicolare abbassata dal vertice sulla base, divide questa in due parti che sono proporzionali ai quadrati dei cateti di cui sono le proiezioni.*

Nel nostro caso dunque avremo:

$$\overline{vo}^2 : \overline{vn}^2 = om : mn = m' : n',$$

e allora per avere i lati del poligono che si cerca cominciando, per es., dal lato AB, lo si porti sul cateto minore in va e per a si conduca la parallela alla on. Il segmento va' sarà il lato omologo ad AB (cioè $A'B'$), perchè avremo ancora

$$\overline{va}^2 : \overline{va'}^2 = ap : pa' = m' : n'.$$

Similmente si operi per gli altri lati compiendo la figura come si è fatto per la riduzione lineare.

PARTE SECONDA.

ORNAMENTI GEOMETRICI

Linee d'ombra o tratti di forza.

Nei disegni rappresentati a semplice contorno, per ottenere maggior effetto, si fa uso di linee sottili e di linee più grosse. Si rappresentano con *tratti fini* gli spigoli appartenenti a faccie illuminate, e con *tratti grossi* (*o di forza*) quelli che terminano faccie che portano ombra.

È convenuto di immaginare che tutti i disegni ricevano la *luce*, dall'angolo superiore sinistro, da un fascio di raggi luminosi paralleli fra loro ed inclinati secondo la diagonale di un cubo.

Avremo quindi per una superficie in *rilievo:*

1°) Tratti verticali: *sottili* quelli a *si-*

nistra perchè appartengono a due faccie illuminate;

grossi quelli a *destra* perchè appartengono a due faccie di cui una è in ombra;

2°) Tratti orizzontali: *sottili* quelli *superiori*, *grossi* quelli *di sotto* per le stesse ragioni;

3°) Tratti obliqui: fini o grossi a seconda che si avvicinano più alla verticale o alla orizzontale. Quando sono paralleli ai raggi luminosi, cioè a 45°, si tracciano sottili (fig. *a*).

Per una superficie, che invece si immagina *incassata* è invertita la regola suesposta (fig. *b*).

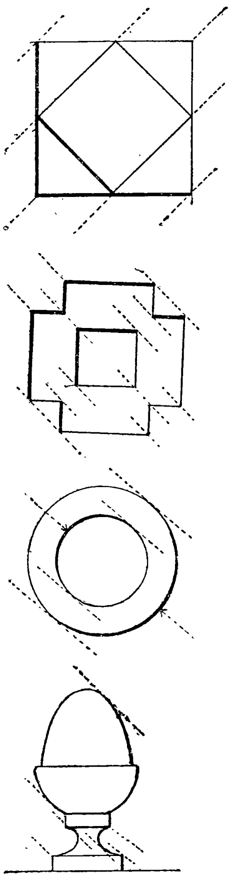
Nelle superficie terminate da *curve* i tratti

a)

b)

c)

d)



d'ombra cominciano insensibilmente nei punti di tangenza dei raggi luminosi colla curva, aumentando gradatamente di forza fino al punto in cui un raggio luminoso può considerarsi normale alla curva (fig. *c*).

Nei *corpi rotondi*, i cui limiti non rappresentano spigoli, non si dovrebbero avere tratti di forza, poichè il riflesso illumina tutto il contorno, ma per aggiungere effetto, e sopperire alla mancanza d'ombreggiamento, si fanno le linee d'ombra come se si trattasse di una superficie piana, però con minore calcatura, avendosi così il vantaggio di distinguere i corpi terminati da superficie piane, da quelli terminati da superficie curve (fig. *d*).

Tavola XVIII.

MEANDRI.

Sono la specie più semplice e più facile di ornamentazione geometrica. Tutti i meandri si eseguiscono tracciando prima una reticola, generalmente quadrangolare o romboidale, la quale, o dà tutta intera la costruzione del disegno, o richiede il concorso di lavori accessori, come rosette o altri fregi.

Fig. 91. — **Meandro su reticola di quadrati.**

La rete sulla quale si compone questo meandro di due fascie intrecciate, si compone di sette linee orizzontali equidistanti intersecate da un numero indefinito di linee perpendicolari pure equidistanti.

Fig. 92. — **Meandro su rete di quadrati.**

Questo meandro moderno, composto di due fascie intrecciate e di formelle a risalto, si disegna su una reticola di quadrati, che ha dieci linee orizzontali.

Fig. 93. — **Meandro su reticola di quadrati.**

Questo meandro, composto di due fascie intrecciate, si compone su una rete di otto linee orizzontali; mentre le due linee estreme 1 e 10 incorniciano il meandro entro un listello.

Fig. 94. — **Meandro su rete romboidale.**

Questo meandro obliquo è composto di una sola fascia che non s'interseca mai. Si eseguisce entro una reticola romboidale, la cui altezza è costituita da 12 linee parallele. È ovvio avvertire che l'inclinazione delle parallele oblique è arbitraria e può variarsi a piacere, e che anche i precedenti meandri possono eseguirsi su una simile rete romboidale.

Tavola XIX.

FREGI DIVERSI.

Fig. 95. — **Rete di triangoli equilateri.**

Questo ornamento costituito da due fettucce intrecciate si compone su una rete di sette linee orizzontali intersecate da linee oblique, nei due sensi, rispettivamente inclinate di 60^0, in modo da formare dei triangoli equilateri. Una linea intermedia alle parallele 1 e 2, 2 e 3, 5 e 6, 6 e 7 e alle linee oblique corrispondenti, darà la traccia della doppia lista a rilievo da cui sono orlate le fasce del fregio.

Fig. 96. — **Rete triangolare.**

Anche in questo fregio le linee oblique sono disposte rispetto alle orizzontali con un angolo di 60^0. Si tracciano prima, alla voluta distanza, le parallele 2 e 8 e l'intermedia 5, poi si costruisce il poligono stellato *a* (vedi fig. 56, tav. X), il quale si contorna, esternamente, da una fascia di larghezza arbitraria, conducendo poi le due parallele 3 e 7, e sempre colla stessa distanza corrispondente alla fascia, anche le due parallele 1 e 9. Fra due stelle esagonali consecutive sta un esagono grande in cui sono racchiusi due esagoni più piccoli.

Fig. 97. — **Rete triangolare.**

In tutti i triangoli equilateri di questa rete si uniscono i vertici *a*, *b*, *c* col centro *d*. Mediante l'ombreggiamento richiesto per produrre il voluto rilievo, ogni triangolo prende l'aspetto di una piramide triangolare (tetraedro), e la riunione di queste piramidi dà origine a dei poligoni stellati a sei punte.

Fig. 98. — **Reticola romboidale.**

I rombi che figurano nel disegno risultano dalla riunione di due triangoli equilateri. Le due figure (*a* e *b*) sono costruite entro un esagono regolare, i cui lati sono divisi in tre parti eguali. Pei punti di divisione si conducono le parallele ai lati, e ne risultano, così, per ognuna delle due figure, 27 rombi, che variamente ed opportunamente ombreggiati prendono l'aspetto di tante faccie di cubi in prospettiva.

Tavola XX.

PAVIMENTI.

Fig. 99. — **Reticola di triangoli equilateri.**

Questo pavimento risulta composto di esagoni regolari (6 triangoli) e di poligoni stellati a 6 punte (6 rombi, ciascuno di 2 triangoli).

Fig. 100. — **Reticola romboidale.**

Anche questa reticola ha origine dal triangolo equilatero, poichè le linee oblique sono inclinate di 60° rispetto alle orizzontali. Le distanze maggiori sono doppie delle minori. Ne risulta un insieme di poligoni stellati e di rombi.

Fig. 101. — **Rete quadrata a lati obliqui.**

I lati dei quadrati del reticolo sono inclinati di 45° rispetto ai lati del foglio. I lati delle fascie che passano sotto le croci, sono ottenuti conducendo le diagonali ai quadrati della rete.

Fig. 102. — **Rete quadrata verticale e obliqua.**

Tracciata la rete principale, secondo la distanza delle parallele 1, 2, 3, 4, ecc., si tracciano le diagonali dei quadri risultanti, e si otterrà la rete obliqua. Con centro nei punti d'incontro della rete principale, e raggio *a b*, si descrive la circonferenza in cui è iscritto l'ottagono regolare, del quale sono già tracciate le diagonali.

La circonferenza di raggio *a c* dà la grandezza della stella che è composta di due foglie quadripartite, sovrapposte, i cui centri sono sulla circonferenza interna *d*.

La larghezza delle fasce incrociate che passano sotto gli ottagoni, è determinata dalla circonferenza di raggio 2 *e*.

L'ombreggiatura aggiungerà effetto e rilievo al disegno.

Tavola XXI.

NODI E INTRECCI.

(Esercizi speciali di raccordamenti).

Fig. 103. — **Nodo su rete di quadrati obliqui.**

Tracciata una linea direttrice, si divide in nove parti eguali, e dai punti 1 e 2, 4 e 5, 7 e 8 si conducono delle parallele inclinate di 45ª alla direttrice. Ne risulterà una rete in cui le distanze minori determinano la larghezza del nastro, il quale avrà la sua continuazione mediante gli archi di circolo, che dovranno essere perfettamente raccordati ai tratti rettilinei.

Fig. 104. — **Intreccio di due nodi.**

Sul diametro della circonferenza che comprende l'intreccio, si prendono tre distanze eguali, e pei punti 0, 1, 2 e 3 si traccia una rete obliqua di quadrati i cui lati danno la larghezza della fettuccia. La figura indica chiaramente i centri delle circonferenze ed i punti di raccordamento.

Fig. 105. — **Intreccio di quattro nastri.**

I raggi delle circonferenze che compongono questo intreccio, sono determinati dalle equidistanze 0 a 6, che sono riportate indefinitamente sull'asse *oa.* Da centro a centro delle circonferenze concentriche si contano 8 distanze. La larghezza dei nastri è di una divisione: gli intervalli di due.

Fig. 106. — **Nastro serpeggiato.**

Su una retta orizzontale si prende un numero indefinito di segmenti eguali 1, 2, 3, 4, 5, ecc., ed abbassate dai punti 1, 3, 5, ecc., le perpendicolari, si descrive, con centro in 5, una semicirconferenza con raggio 5-2, la quale taglierà le perpendicolari nei punti 6 e 7, pei quali passerà la seconda parallela.

I circoli minori hanno per raggio una divisione: i circoli maggiori hanno raggio doppio. Tutti i punti di raccordamento sono sulle congiungenti dei centri.

Tavola XXII.

INTRECCI VARI.

Fig. 107. — **Intreccio rettilineo iscritto in una circonferenza.**

Base di questo ornamento è l'ottagono stellato risultante dalla intersezione di due quadrati iscritti nella circonferenza data. La figura si completa su un reticolo di quadrati aventi i lati rispettivamente paralleli ai lati dei due quadrati.

Fig. 108. — **Intreccio curvilineo iscritto in un quadrato.**

Descritto il quadrato, si trovano i punti simmetrici *b*, *c*, *d*, *e*, che sono i centri degli archi che compongono la figura, e si tracciano le congiungenti dei punti c e d per avere i punti di raccordamento f e g degli archi di circolo.

Sarà quindi facile compiere la figura, osservando di alternare la sovrapposizione delle liste per ottenere l'intreccio regolare.

Tavola XXIII a XXVI.

I disegni di queste tavole sono eseguiti in iscala, si possono così avere le dimensioni naturali degli oggetti ivi rappresentati: sarà quindi ottimo esercizio disegnare questi modelli in diversa scala. Questi disegni non offrono nuove difficoltà: ma richiedono molta precisione specialmente nelle due ultime tavole.

Tavola XXIII.

OGGETTI VARI.

Fig. 109. — **Palla egizia.**

Il corpo principale è una sfera, terminata da una punta a cono, e sostenuta da un piede o *base.* La curva del piede, detta *scozia,* è composta di due archi di circolo di diverso raggio, raccordati fra loro. La figura indica chiaramente il modo di costruire questa curva (fig. 41).

Fig. 110. — **Ghianda.**

È costituita da un ovolo, in cui la mezza sfera ha il diametro alquanto maggiore dell'asse minore della semi-ovale, sostenuto da un piede o *base.*

Fig. 111. — **Calice.**

Il *vaso* del calice ha forma tronco-conica, e termina con callotta sferica; poggia su un *piede.*

Fig. 112. — **Mensola.**

Il *piano*[1] della mensola è ad angolo retto cogli spigoli verticali, ed è terminato da una cornice. Il fianco del sostegno è ornato da una doppia spirale con piccole foglie. La sua costruzione è la seguente: il segmento *a* è rettilineo, e le due spirali si compongono di tanti archi di circolo di diverso raggio, raccordati, e di cui i centri sono successivamente *b*, *c*, *d*, *e* ed *f*, *g*, *h*.

Tavola XXIV.

VASI.

Fig. 113 e 116. — Vasi greci.
Fig. 114. — Vaso. - Ceramiche di Faenza.
Fig. 115. — Anfora moderna.

Il *corpo* dei vasi è terminato da un *orlo* o *bocca,* e sostenuto da un *piede.* Le parti accessorie (manichi) e d'ornamento, che completano il vaso, si disegnano a mano libera.

Tavola XXV.

ORNAMENTI IN FERRO.

Fig. 117. — Ringhiera.

Stabilita l'altezza da darsi alla ringhiera, si disegnano le due cornici estreme: la *cimasa* e la *base*, entro le quali sono comprese le bacchette ripiegate e unite fra loro. Si stabilisce la distanza delle colonnine verticali, e presa questa distanza come base di un triangolo equilatero, si fissa l'altezza dei piccoli anelli di collegamento, sui quali si formano gli archi gotici. Gli altri archi che completano la figura, e gli anelli circolari, hanno il loro centro sulla linea mediana dell'altezza delle colonnine.

Fig. 118. — **Ventaglio da porta o inferriata semicircolare.**

Tracciate le due semicirconferenze principali, si compone, nella corona circolare da esse determinata, l'intreccio di anelli fra loro tangenti. I raggi del ventaglio interno sono condotti al centro degli anelli, e fra loro raccordati con archi di circolo. Il numero dei raggi del ventaglio piccolo è la metà di quello del ventaglio grande.

Tavola XXVI.

Fig. 119. — **Finestra gotica.**

Fissata l'incorniciatura, si traccia la linea di base $a\,b$, che dà la larghezza della finestra, sulla quale si descrive l'arco equilatero a punta abc. Divisa la base $a\,b$ in quattro parti eguali, si descrivono i due archi equilateri $a\,d\,e$, ecc. e su ogni metà della loro base si descrivono altri quattro archi. Collo stesso raggio $a\,f$, ora adoperato, si descrivono pure i triangoli curvilinei che riempiono lo spazio lasciato fra gli archi minori ed i due medî.

La rosetta centrale, chiamata *quadrifoglia* o *crociera*, ha il suo centro g nell'incontro dei due archi tracciati da a e da b con raggio $b\,f$, ed il raggio della circonferenza che la iscrive è uguale ad $^1/_4$ della base $a\,b$.

Nei due triangoli mistilinei, che rimangono fra l'arco principale e l'incorniciatura, si inscrivono due circonferenze, il cui centro h sarà sulla bisettrice dell'angolo retto. Queste due circonferenze comprendono una *foglia di trifoglio o trifido.* I quattro triangoli rimanenti sono occupati da foglie di trifoglio a punta e gli altri intervalli sono riempiti da *piastrelle* e *imoscapi.*

Le linee di costruzione, indicate nel modello, indicano chiaramente il modo di costruire le figure di frastaglio, e la fig. 36 della Tav. VI dà la regola per inscrivere tre o più circonferenze in un'altra circonferenza.

Capitale inclinata

5 *ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ.*

Romana inclinata

2 3 2 *abcdefghijklmnopqrstuvwxyz.*

Italica

5 *ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ.*

2 3 2 *abcdefghijklmnopqrstuvwxyz.*

Esempi vari di scritture

in Romano	*in Italica*
Disegno Geometrico	*Disegno Geometrico*
Tavola-Figura-Tav.	*Tavola-Figura-Fig.*

Parte I.ª II.ª - 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - Parte I.ª II.ª

Disegno Geometrico - Parte I.ª	*Disegno Geometrico - Parte I.ª*

Tavola Figura Tav. Fig. - 1234567890 - Tavola Figura Tav. Fig.

Parte I.ª II.ª Tav. Fig. — 1234567890 — Parte I.ª II.ª Tav. Fig.

Ulrico Hoepli editore-Milano

A. Antilli

Fig. 1.

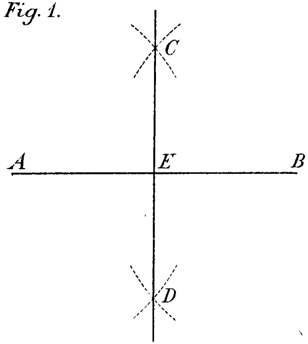


Fig. 2.

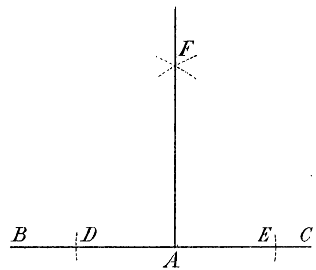


Fig. 3.

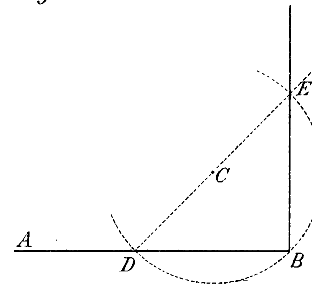


Fig. 4.

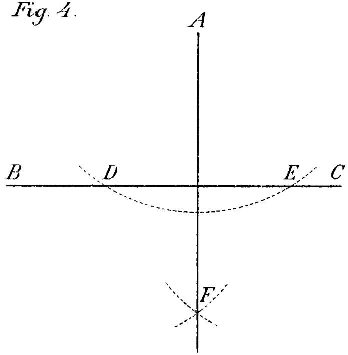


Fig. 5.

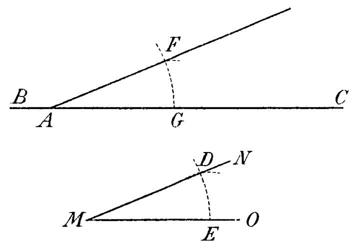
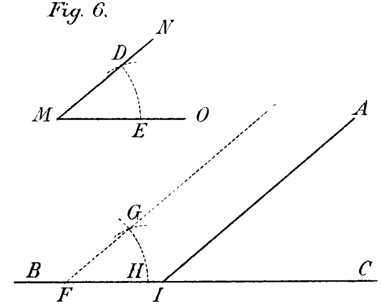


Fig. 6.



Ulrico Hoepli editore - Milano A. Antilli

Lit. A. Dal Re & F.i - suc. Pizzolotti - Modena

Fig. 19.

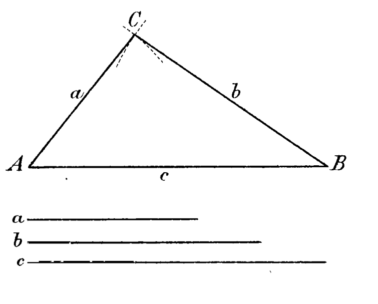


Fig. 20

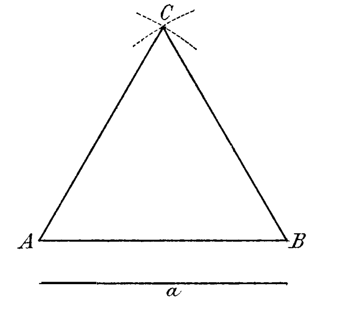


Fig. 21.

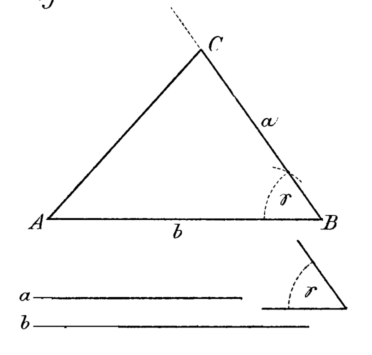


Fig. 22.

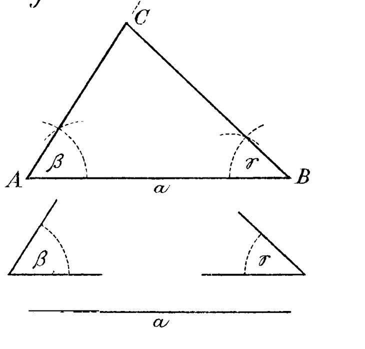


Fig. 23.

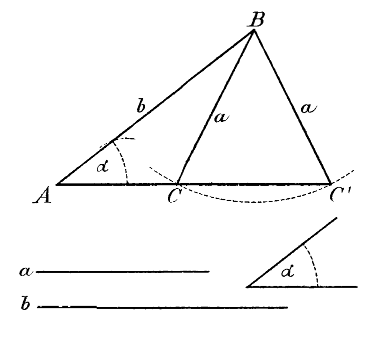


Fig. 24.

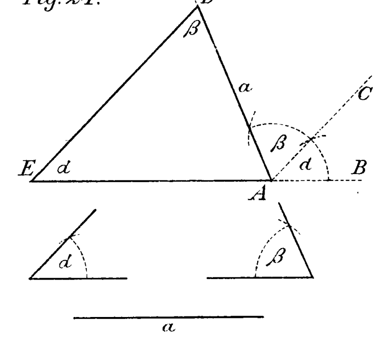


Fig. 31.

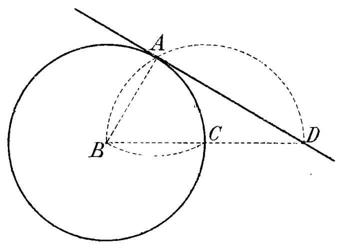


Fig. 32.

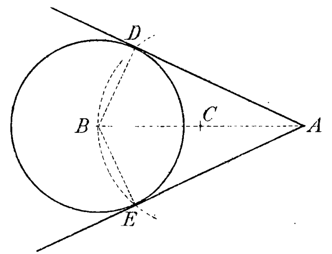


Fig. 33.

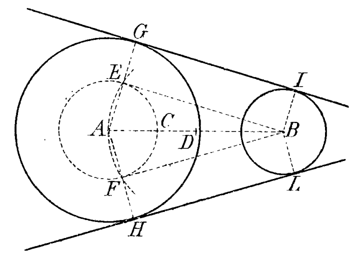


Fig. 34.

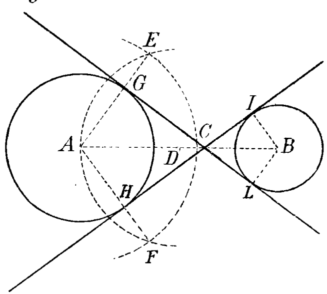


Fig. 35.

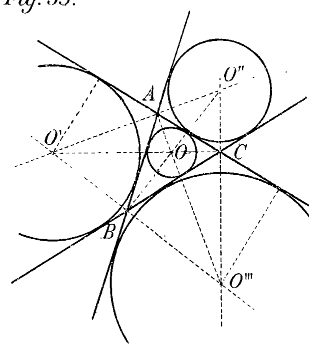
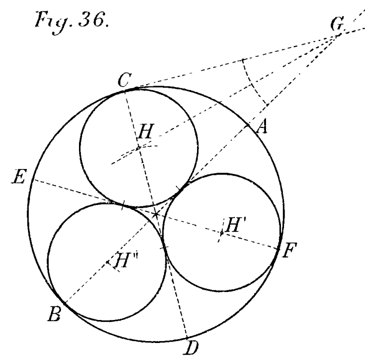


Fig. 36.



Ulrico Hoepli editore-Milano A. Antilli

Fig. 25.

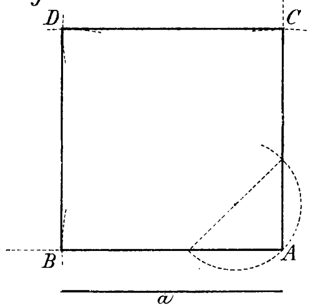


Fig. 26.

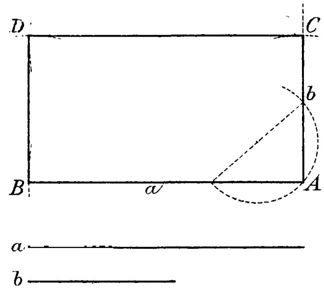


Fig. 27.

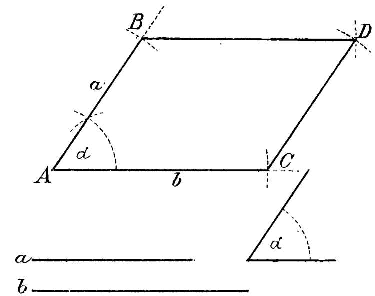


Fig. 28.

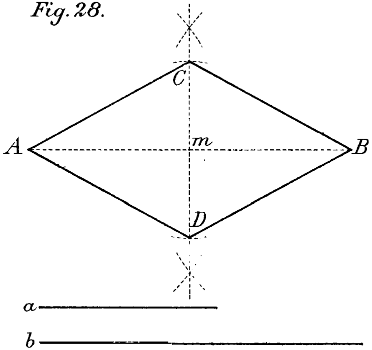


Fig. 29.

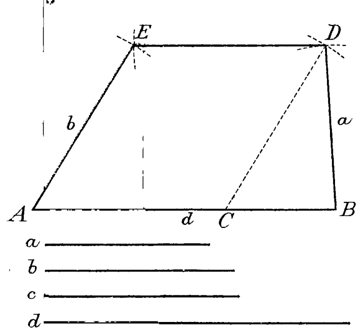
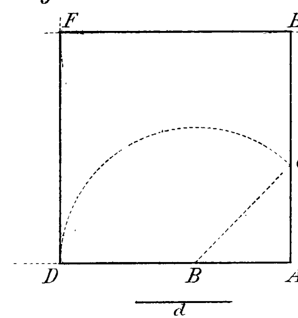


Fig. 30.



Ulrico Hoepli editore - Milano A. Antilli

Fig. 43.

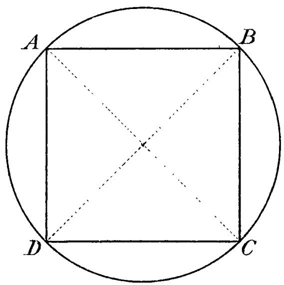


Fig. 44.

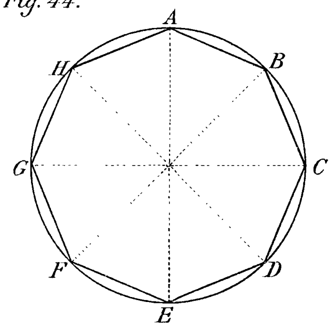


Fig. 45.

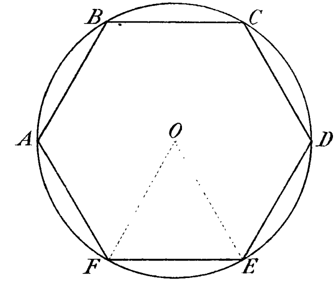


Fig. 46.

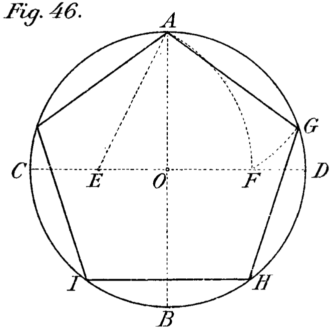


Fig. 47.

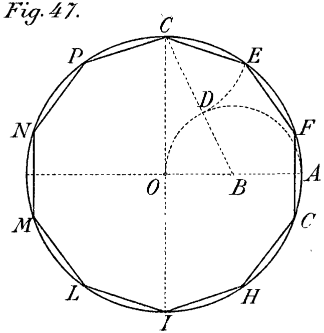
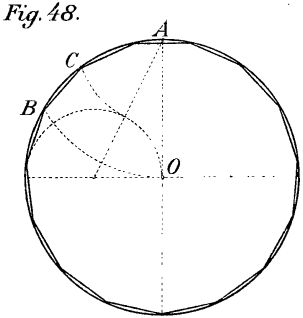


Fig. 48.



Ulrico Hoepli editore - Milano

A. Antilli

Costruzione di poligoni di lato dato

Fig. 49.

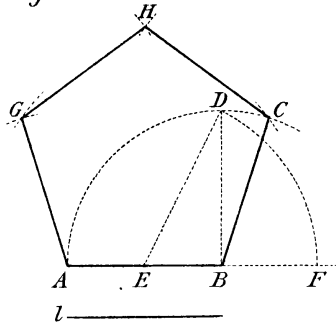


Fig. 50.

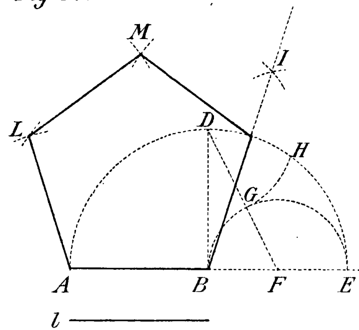


Fig. 51.

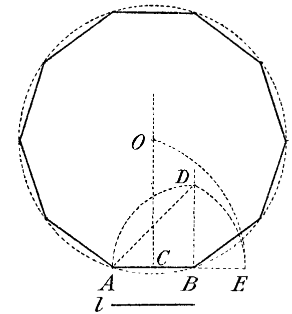


Fig. 52.

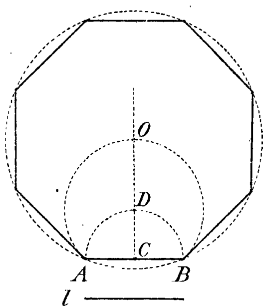


Fig. 53.

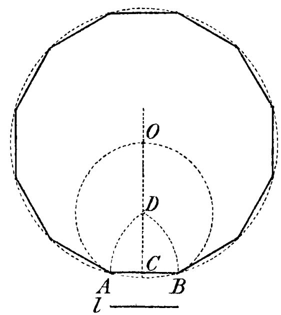
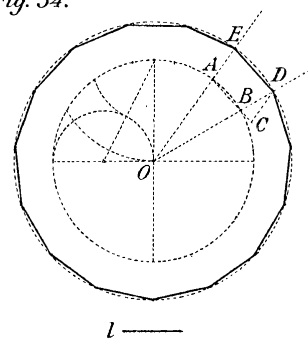


Fig. 54.



Ulrico Hoepli editore-Milano

A. Antilli

Fig. 55.

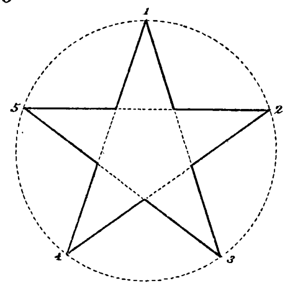


Fig. 56.

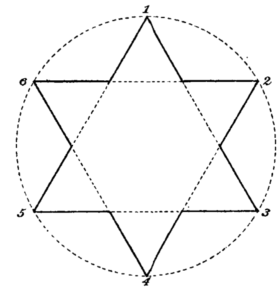


Fig. 57.

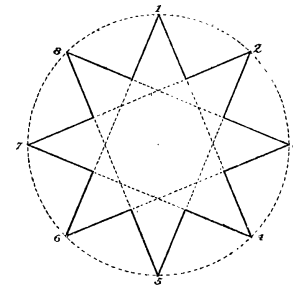


Fig. 58.

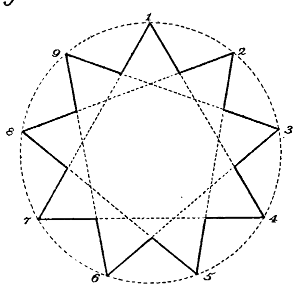


Fig. 59.

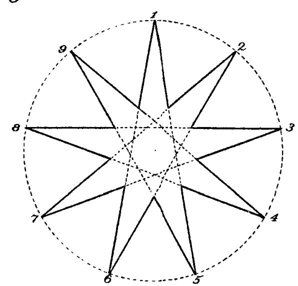
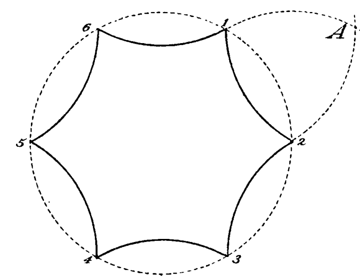


Fig. 60.



Ulrico Hoepli editore-Milano

A. Antilli

Fig. 61.

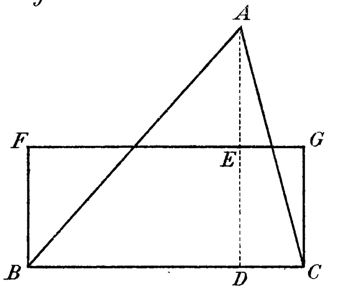


Fig. 62.

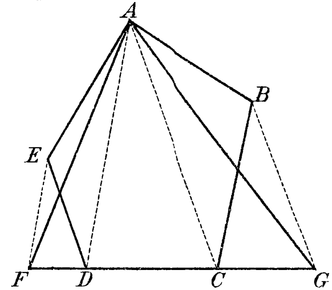


Fig. 63.

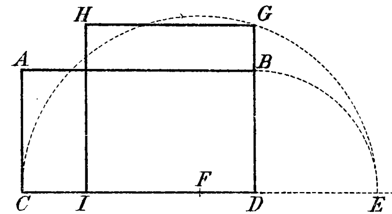


Fig. 64.

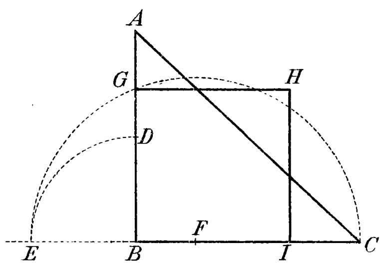


Fig. 65.

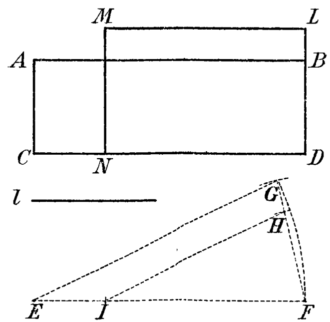
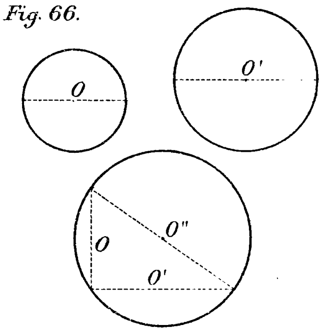


Fig. 66.



Ulrico Hoepli editore · Milano A. Antilli

Ovale-Ovolo-Spirale

Fig. 67

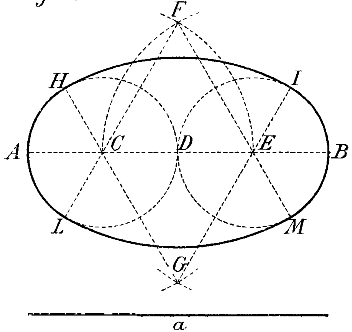


Fig. 68.

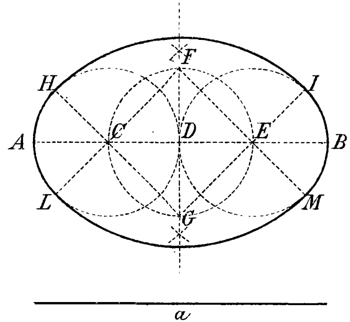


Fig. 69.

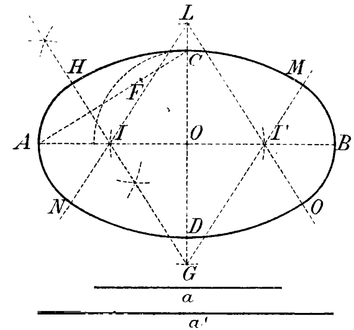


Fig. 70.

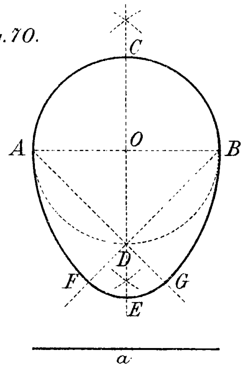


Fig. 71.

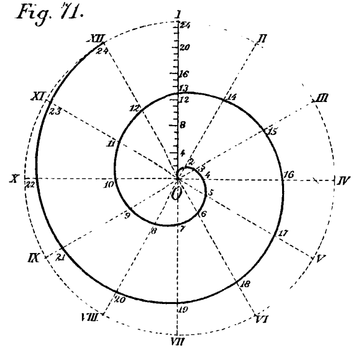
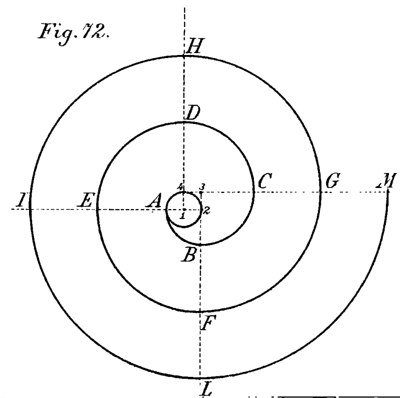


Fig. 72.



Ulrico Hoepli editore Milano

A. Antilli

Fig. 73.

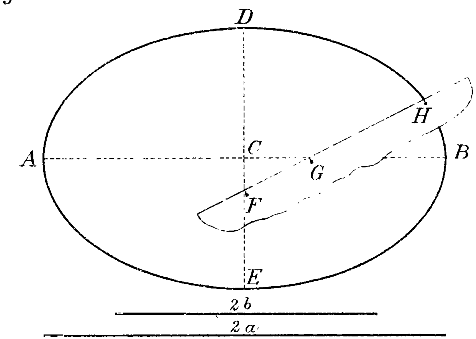


Fig. 74.

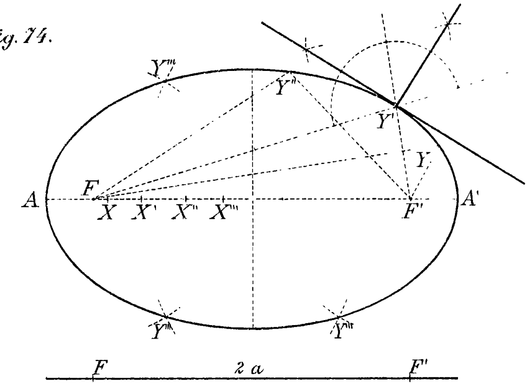


Fig. 75.

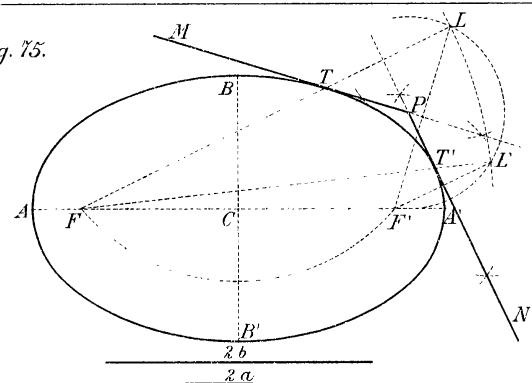
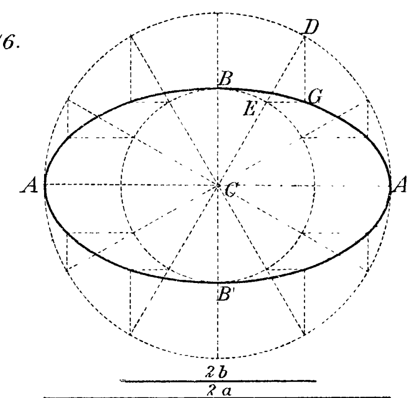


Fig. 76.



Ulrico Hoepli editore·Milano A. Antilli

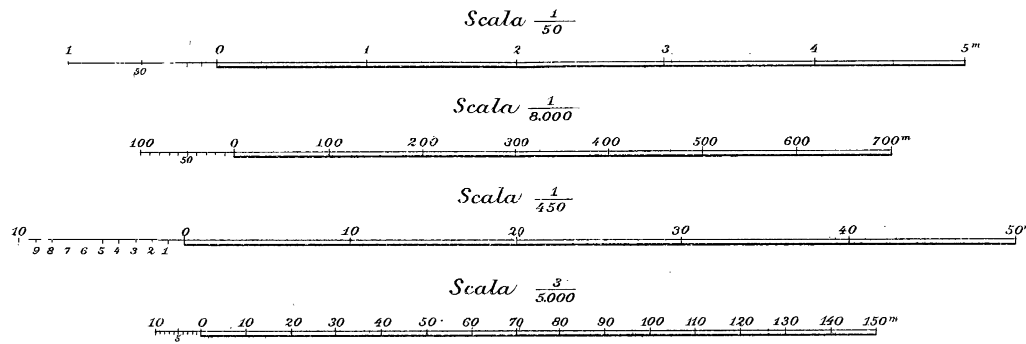


Fig. 81.

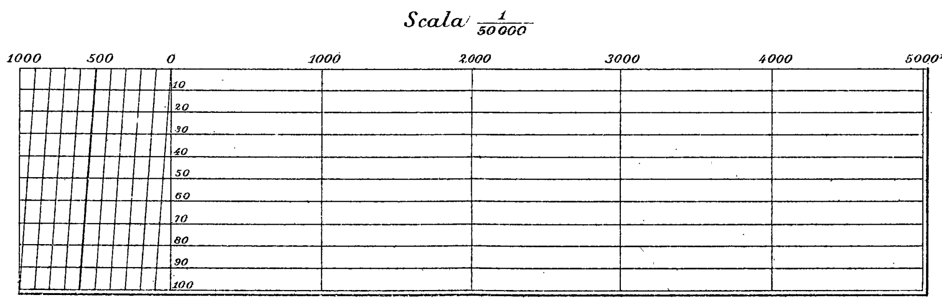


Fig. 82.

Ulrico Hoepli editore-Milano A. Antilli

Fig. 83.

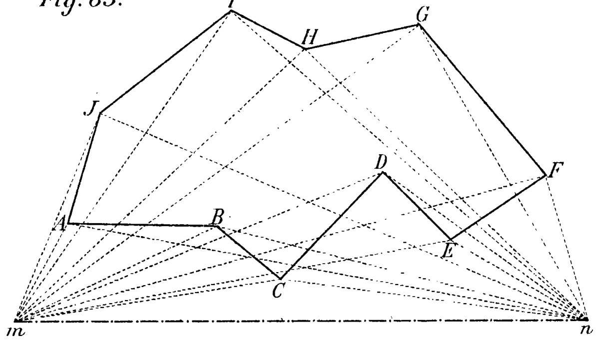


Fig. 84.

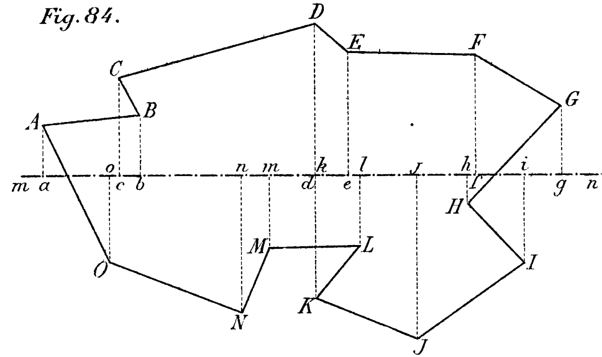


Fig. 85.

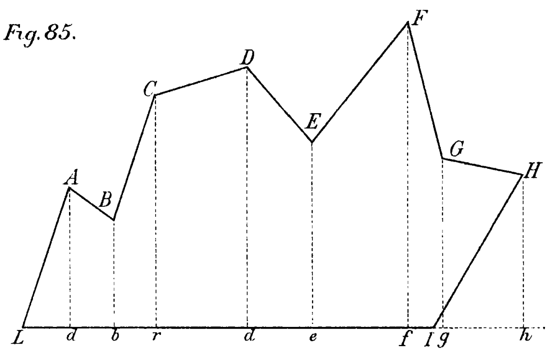
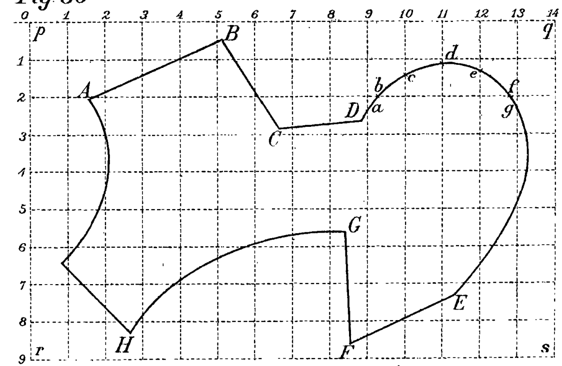


Fig. 86



Ulrico Hoepli editore-Milano

A. Antilli

Fig. 87.

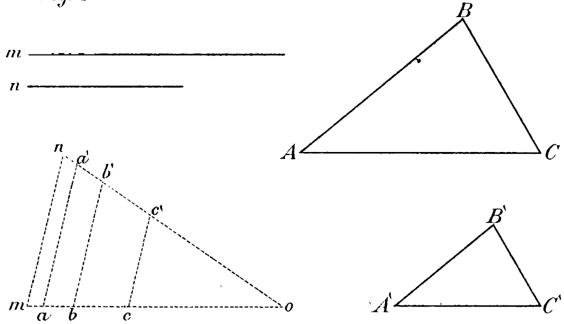


Fig. 88.

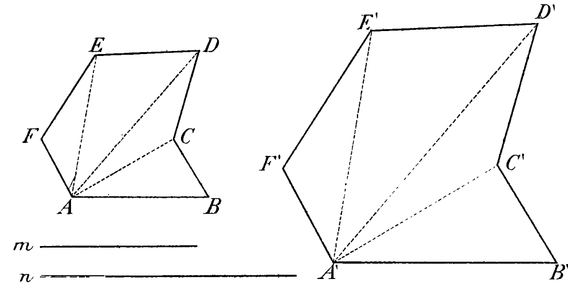


Fig. 89.

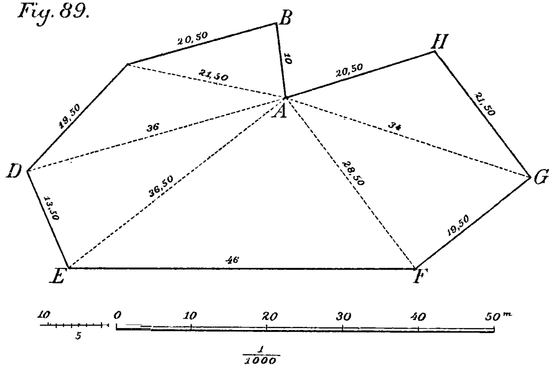
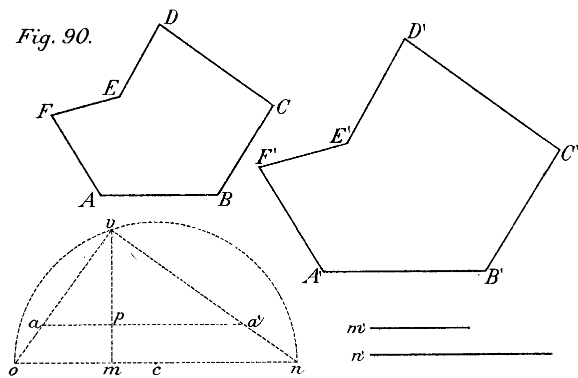


Fig. 90.



Ulrico Hoepli editore-Milano A. Antilli

Fig. 91.

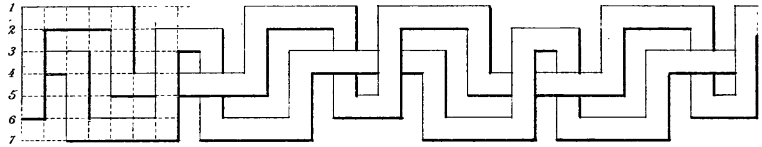


Fig. 92.

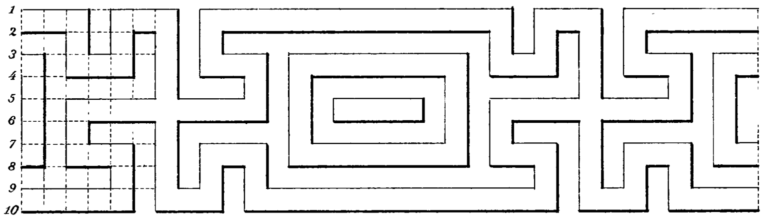


Fig. 93.

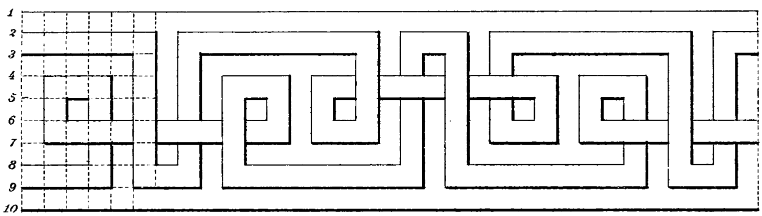
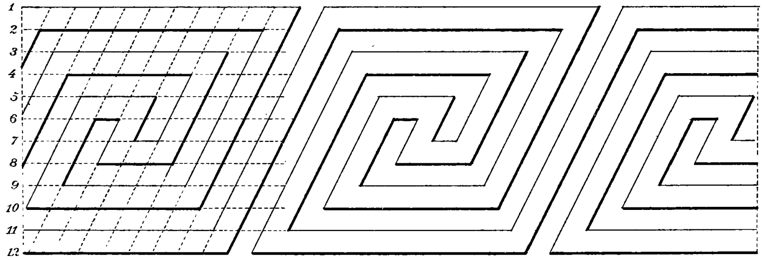


Fig. 94.



Ulrico Hoepli editore Milano A. Antilli

Fig. 95.

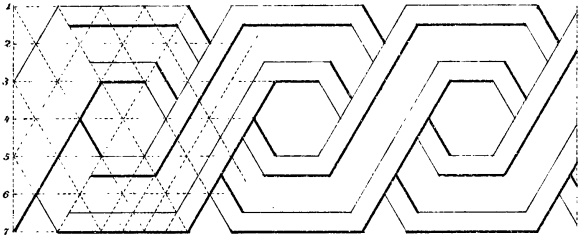


Fig. 97.

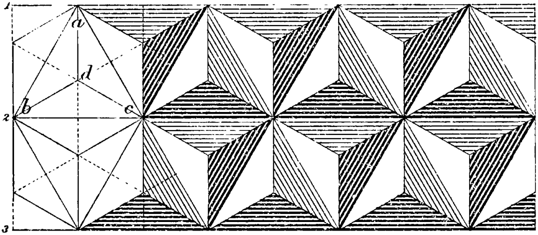


Fig. 96.

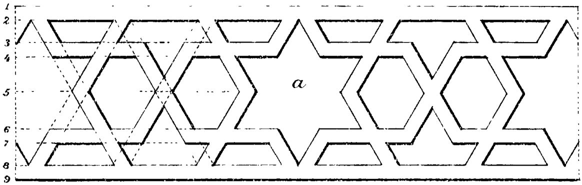
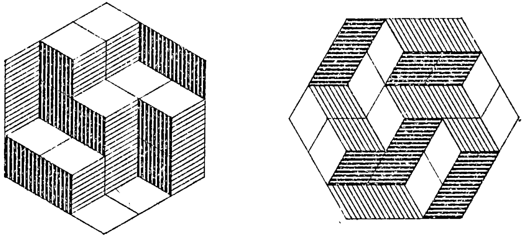


Fig. 98.



(a) *(b)*

A. Antilli

Fig. 99.

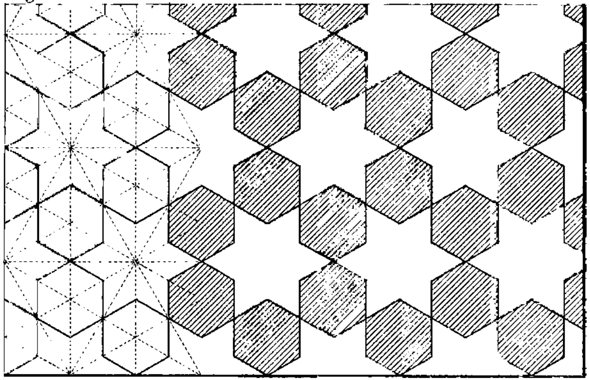


Fig. 100.

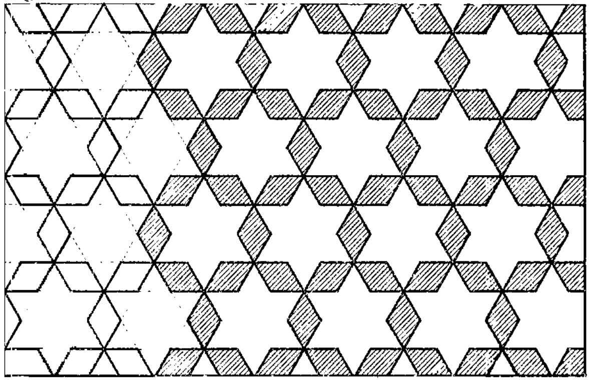


Fig. 101.

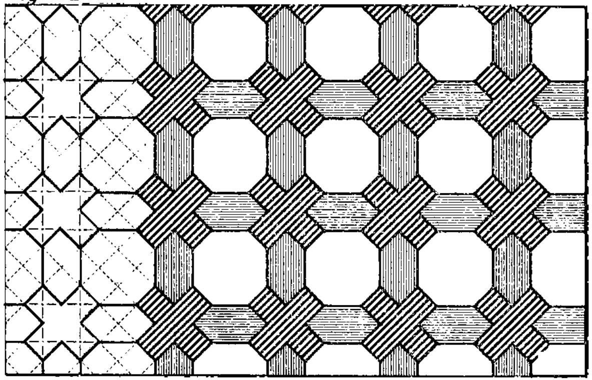
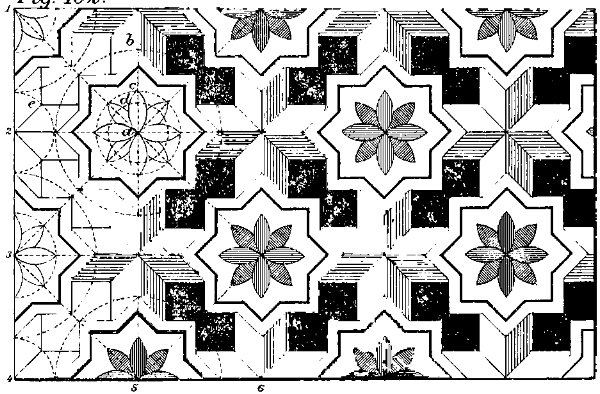


Fig. 102.



Ulrico Hoepli editore-Milano A. Antilli

Fig. 103.

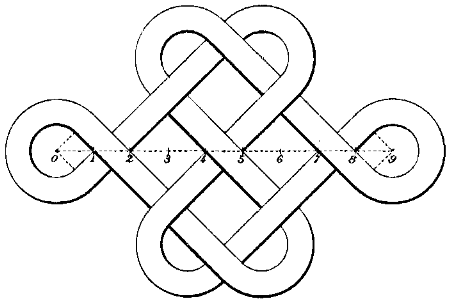


Fig. 104.

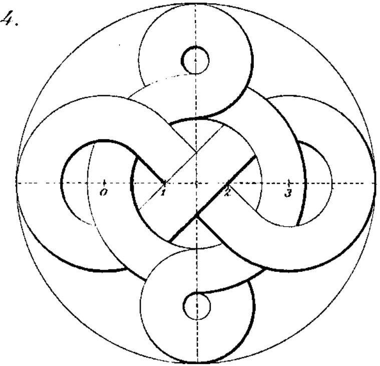


Fig. 105.

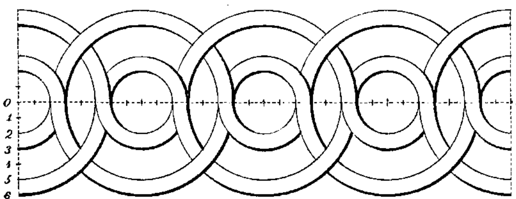
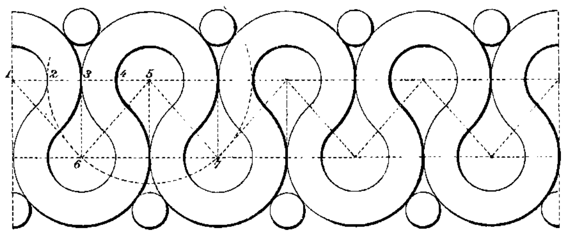


Fig. 106.



Ulrico Hoepli editore Milano

A. Antilli

Fig. 107.

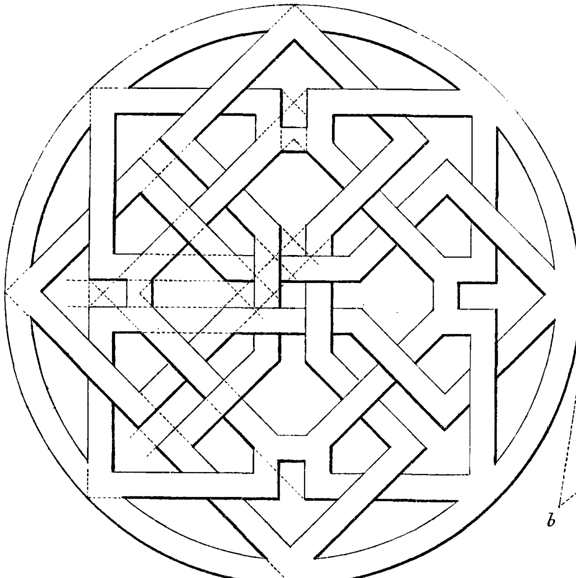
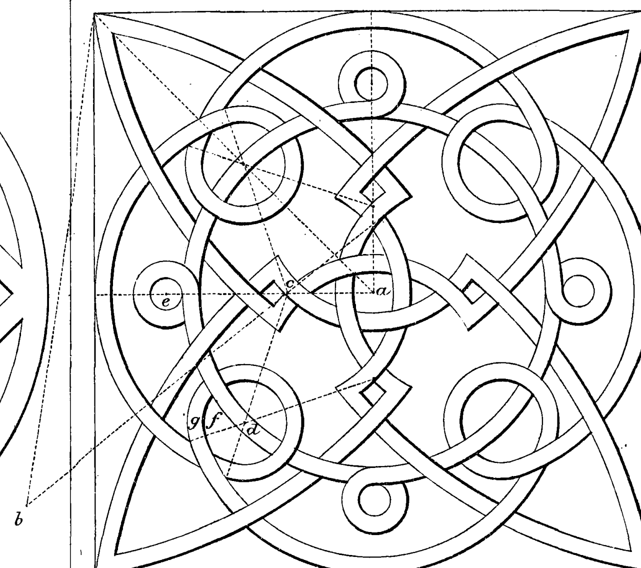


Fig. 108.



Ulrico Hoepli editore - Milano

A. Antilli

Fig. 109.

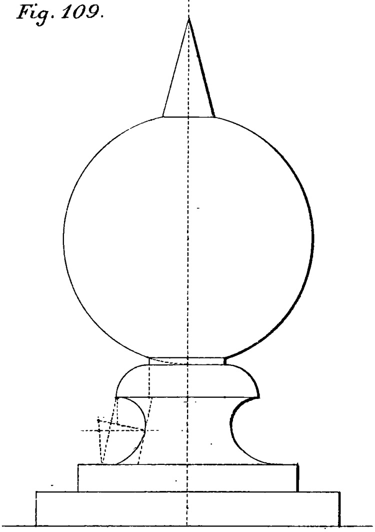
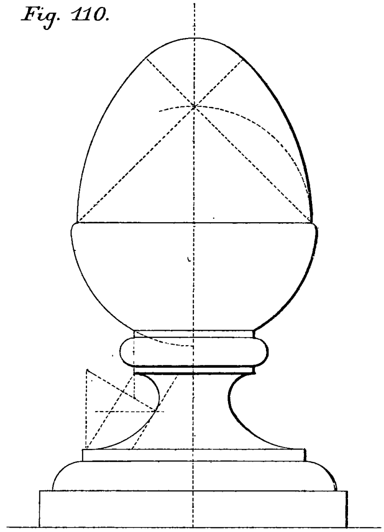
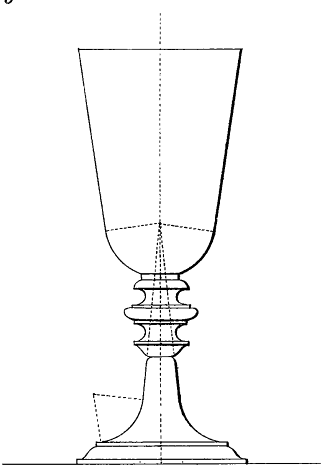


Fig. 110.



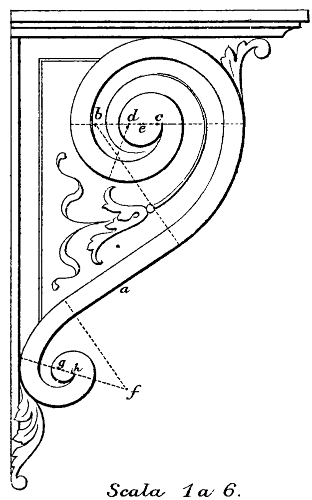
Scala 1 a 10.

Fig. 111.



Scala 1 a 4.

Fig. 112.



Scala 1 a 6.

Ulrico Hoepli editore Milano

A. Antilli

Fig 113

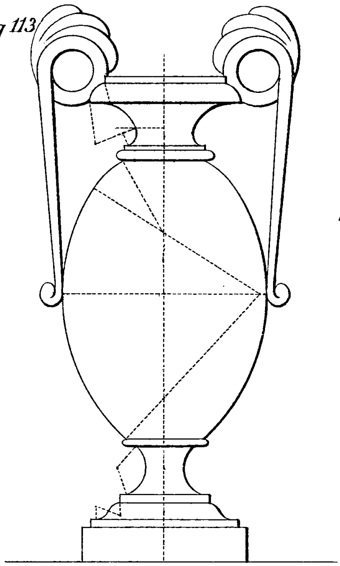
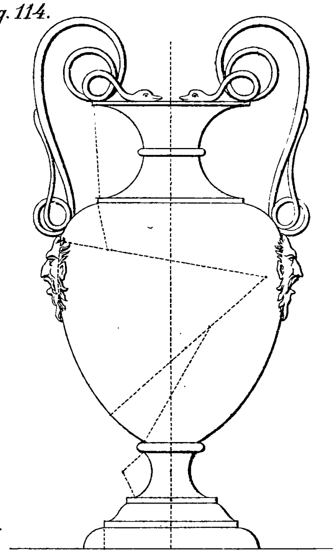


Fig. 114.



Scala 1 a 10

10 5 0 10 20 30 40 50 cm

Fig. 115.

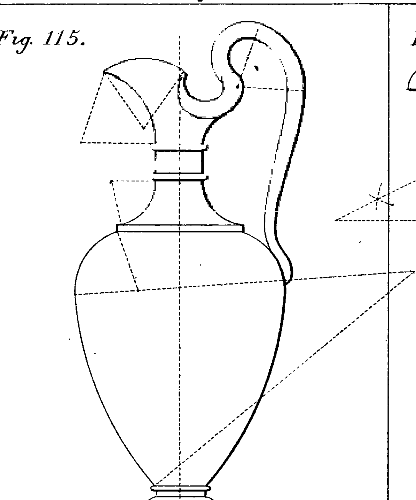
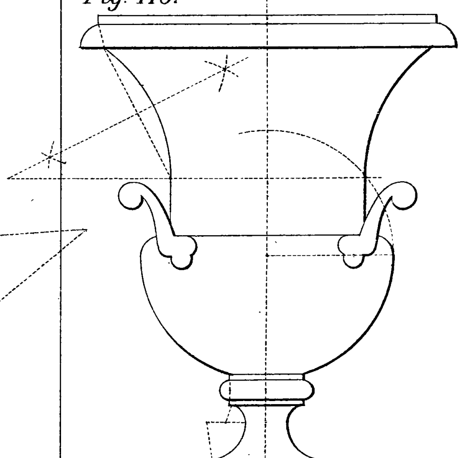


Fig. 116.

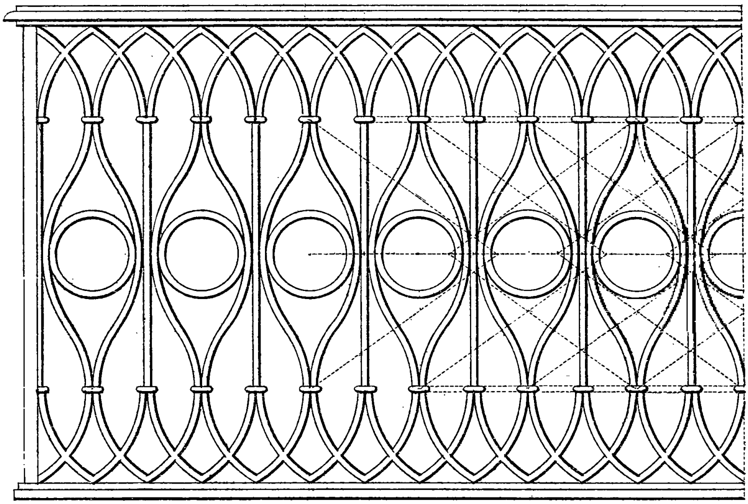


Scala 1 a 12

10 0 10 20 30 40 50 60 cm

Ulrico Hoepli editore - Milano A. Antilli

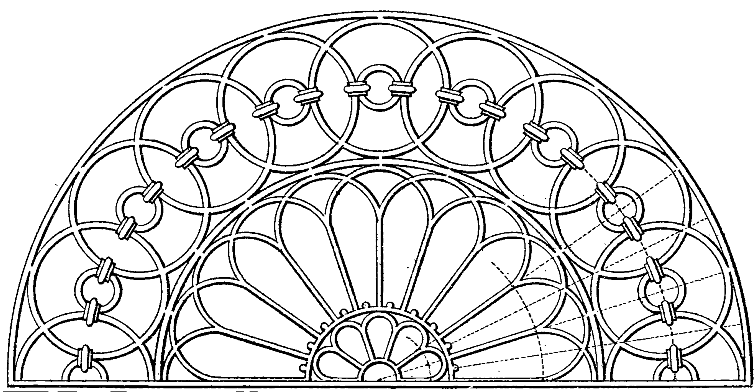
Fig. 117.



Scala 1 a 15.

10 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 cm

Fig. 118.

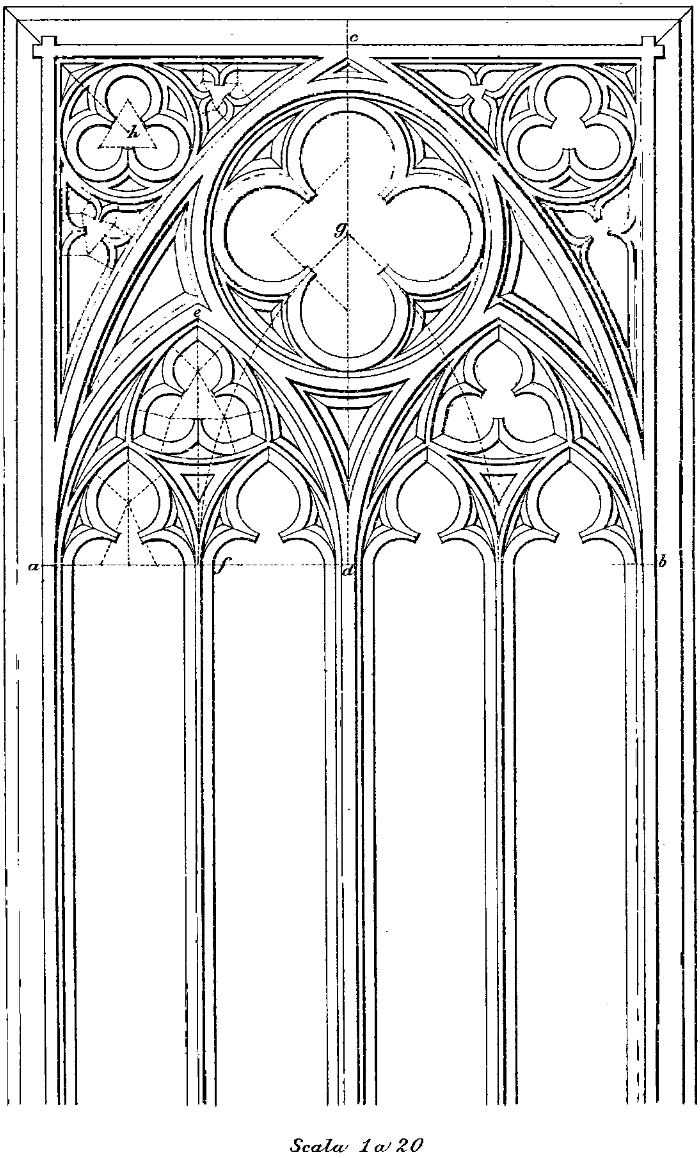


Scala 1 a 20.

10 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 cm

Ulrico Hoepli editore-Milano A. Antilli

Fig. 119.



Scala 1 a 20

Ulrico Hoepli editore - Milano

A. Antilli

Lit. A. Dal Re & F.i - suc Pizzolotti - Modena